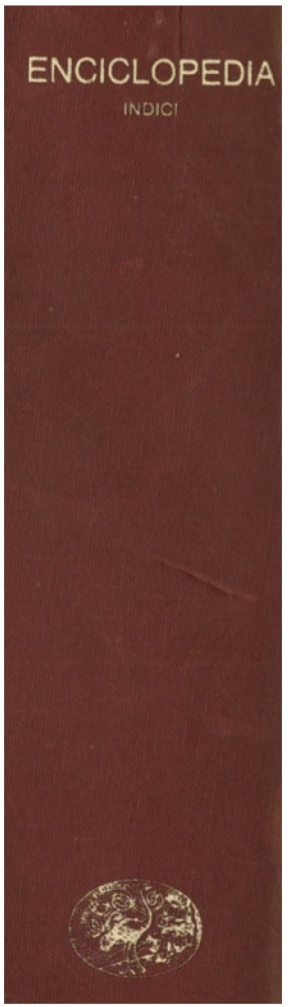


ENCICLOPEDIA EINAUDI [1982]

LOGICA

Marco Mondadori - **LOGICA** pag.4

Hilary Putnam - **DEDUZIONE/PROVA** pag.14
EQUIVALENZA pag.23
FORMALIZZAZIONE pag.33
LOGICA pag.42
POSSIBILITÁ/NECESSITÁ pag.73
REFERENZA/VERITÁ pag.83
RICORSIVITÁ pag.92

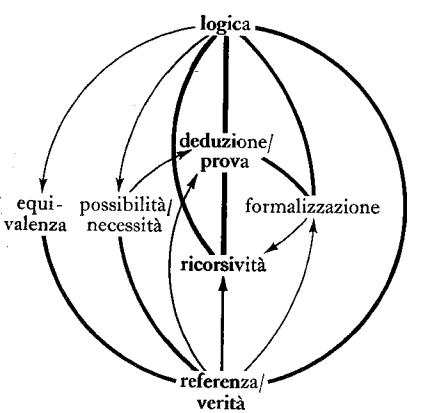
	anthropos	argomentazione	arti	calcolo	capitale	cervello	civiltà	classi	cognizione	combinatoria	comunicazione	concetto	conoscenza	corpo	creatività	cultura mat.
deduzione/prova	·	2	·	4	·	4	·	·	4	·	5	6	5	·	5	2
equivalenza	3	·	·	4	·	3	·	·	4	4	2	5	5	3	6	·
formalizzazione	·	3	·	·	4	3	·	·	5	2	·	·	5	·	4	·
logica	4	5	4	6	5	6	·	2	6	3	7	8	8	2	7	3
possibilità/necessità	1	·	4	2	5	3	3	4	5	3	5	5	6	·	7	5
referenza/verità	3	5	4	5	4	5	·	5	4	3	4	8	7	5	7	·
ricorsività	·	·	·	4	·	·	·	·	·	2	·	·	·	·	4	·

	memoria	metodo	modo di produz.	mythos/logos	natura	normale/anormale	orale/scritto	organico/inorgan.	organismo	parentela	politica	probabilità	produzione/distrib.	regione	religione	rito
deduzione/prova	3	5	·	3	5	4	4	2	5	2	·	7	·	·	2	3
equivalenza	·	1	·	·	4	1	3	2	2	4	·	3	2	·	·	2
formalizzazione	·	·	·	·	2	·	2	·	·	·	·	·	·	1	·	·
logica	3	7	5	6	5	7	6	5	5	5	4	6	5	5	6	2
possibilità/necessità	·	5	5	3	6	5	4	5	3	5	2	5	6	5	5	·
referenza/verità	1	5	4	6	7	5	6	1	2	1	5	5	5	2	6	3
ricorsività	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

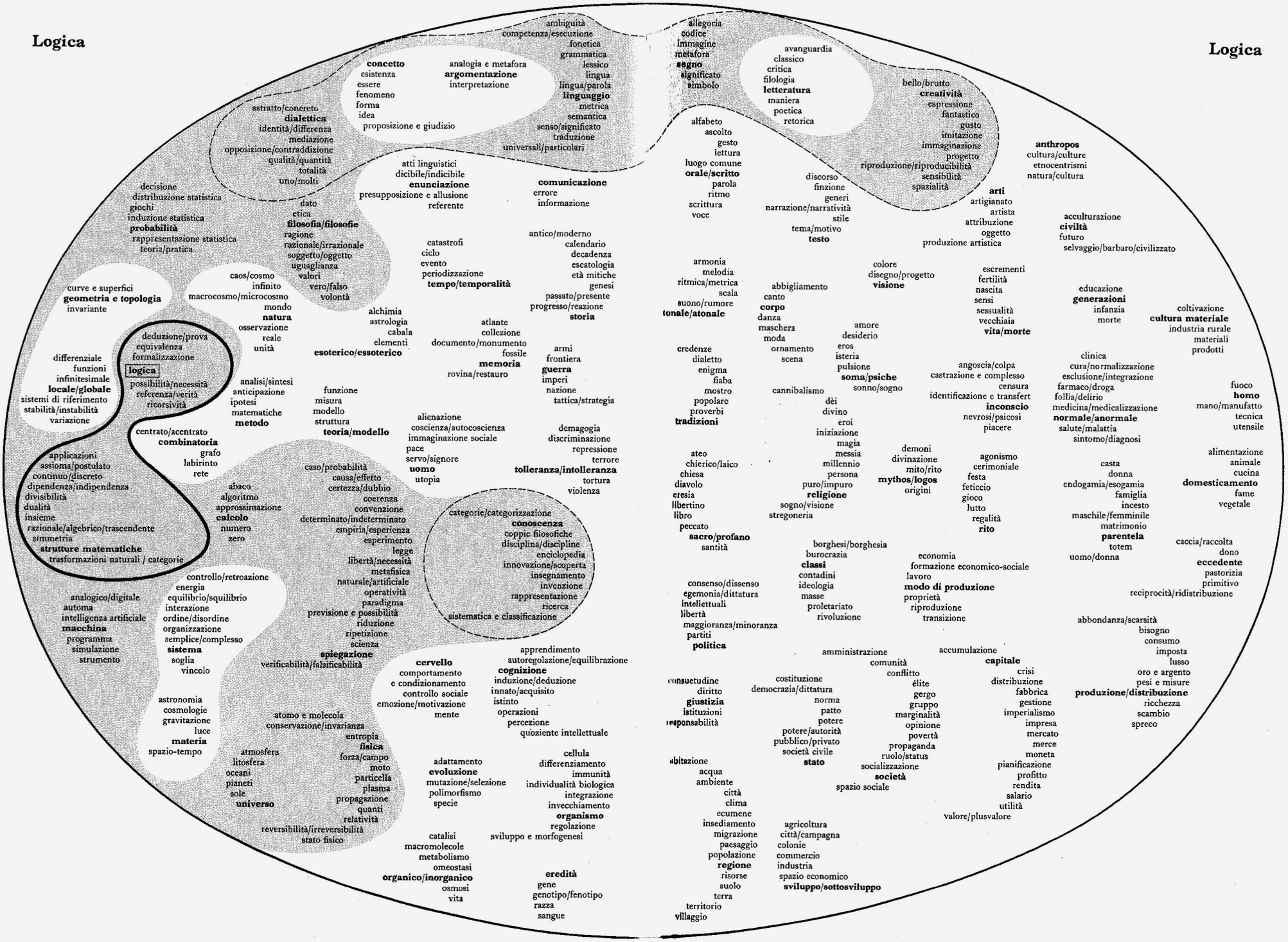
	dialettica	domesticam.	eccedente	enunciazione	eredità	esoterico/essoter.	evoluzione	filosofia/filosofie	fisica	generazioni	geometria e topol.	giustizia	guerra	homo	inconscio	letteratura	linguaggio	locale/globale	logica	macchina	materia
deduzione/prova	4	·	·	3	2	3	2	5	6	·	·	2	3	·	·	·	5	5	7	5	5
equivalenza	5	·	·	·	·	·	·	6	6	1	6	4	·	·	1	4	4	7	3	4	7
formalizzazione	4	·	·	·	·	·	·	4	3	·	3	·	·	·	·	2	3	4	7	4	3
logica	7	·	3	6	3	2	·	7	4	·	5	6	4	4	4	5	8	7	8	6	4
possibilità/necessità	5	2	2	3	·	4	4	5	5	2	2	5	3	4	1	3	5	4	5	5	5
referenza/verità	7	·	·	7	·	5	·	7	6	2	3	4	3	·	6	3	7	5	8	2	4
ricorsività	4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	4	·	5	3	·

	sacro,profano	segno	sistema	società	soma/psiche	spiegazione	stato	storia	strutture matem.	sviluppo/sottosvil.	tempo/temporalità	teoria/modello	testo	tolleranza/intoll.	tonale/atonale	tradizioni	universo	uomo	visione	vita/morte
deduzione/prova	·	5	4	4	·	7	·	3	6	·	3	6	3	2	·	5	5	·	2	·
equivalenza	1	7	5	·	·	5	3	·	6	·	·	3	2	·	·	3	2	·	3	·
formalizzazione	·	3	2	4	·	3	·	·	5	·	·	6	3	·	·	3	·	2	·	·
logica	4	7	6	6	5	8	5	6	7	·	4	7	5	3	2	5	·	6	·	1
possibilità/necessità	2	5	5	4	5	8	5	3	3	3	6	5	5	2	4	2	·	5	2	2
referenza/verità	5	7	6	6	4	9	5	6	7	·	5	5	5	5	2	5	·	5	6	3
ricorsività	·	3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

	logica	formalizzazione	deduzione/prova	ricorsività	referenza/verità	possibilità/necessità	equivalenza
logica	·	6	5	4	4	6	5
formalizzazione	6	·	2	4	·	2	·
deduzione/prova	5	5	·	3	·	·	2
ricorsività	4	·	2	·	·	·	·
referenza/verità	6	3	5	5	·	6	4
possibilità/necessità	·	·	4	·	4	·	·
equivalenza	·	·	·	·	2	1	·



Logica

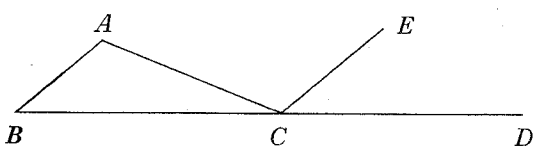

ambiguità
competenza/esecuzione
fonetica
grammatica
lessico
lingua
lingua/parola
linguaggio
metrica
semantica
senso/significato
traduzione
universali/particolari
concetto
esistenza
essere
fenomeno
forma
idea
proposizione e giudizio
analogia e metafora
argomentazione
interpretazione
astratto/concreto
dialettica
identità/differenza
mediazione
opposizione/contraddizione
qualità/quantità
totalità
uno/molti
decisione
distribuzione statistica
giochi
induzione statistica
probabilità
rappresentazione statistica
teoria/pratica
dato
etica
filosofia/filosofie
ragione
razionale/irrazionale
soggetto/oggetto
uguaglianza
valori
vero/falso
volontà
atti linguistici
dicibile/indicibile
enunciazione
presupposizione e allusione
referente
comunicazione
errore
informazione
antico/moderno
calendario
decadenza
escatologia
età mitiche
genesi
passato/presente
progresso/reazione
storia
catastrofi
ciclo
evento
periodizzazione
tempo/temporalità
curve e superfici
geometria e topologia
invariante
caos/cosmo
infinito
macrocosmo/microcosmo
mondo
natura
osservazione
reale
unità
alchimia
astrologia
cabala
elementi
esoterico/essoterico
atlante
collezione
documento/monumento
fossile
memoria
rovina/restauro
armi
frontiera
guerra
imperi
nazione
tattica/strategia
deduzione/prova
equivalenza
formalizzazione
logica
possibilità/necessità
referenza/verità
ricorsività
differenziale
funzioni
infinitesimale
locale/globale
sistemi di riferimento
stabilità/instabilità
variazione
analisi/sintesi
anticipazione
ipotesi
matematiche
metodo
funzione
misura
modello
struttura
teoria/modello
alienazione
coscienza/autocoscienza
immaginazione sociale
pace
servo/signore
uomo
utopia
demagogia
discriminazione
repressione
terrore
tolleranza/intolleranza
tortura
violenza
centrato/acentrato
combinatoria
grafo
labirinto
rete
applicazioni
assioma/postulato
continuo/discreto
dipendenza/indipendenza
divisibilità
dualità
insieme
razionale/algebrico/trascendente
simmetria
strutture matematiche
trasformazioni naturali / categorie
caso/probabilità
causa/effetto
certezza/dubbio
coerenza
convenzione
determinato/indeterminato
empiria/esperienza
esperimento
legge
libertà/necessità
metafisica
naturale/artificiale
operatività
paradigma
previsione e possibilità
riduzione
ripetizione
scienza
spiegazione
verificabilità/falsificabilità
abaco
algoritmo
approssimazione
calcolo
numero
zero
categorie/categorizzazione
conoscenza
coppie filosofiche
disciplina/discipline
enciclopedia
innovazione/scoperta
insegnamento
invenzione
rappresentazione
ricerca
sistematica e classificazione
controllo/retroazione
energia
equilibrio/squilibrio
interazione
ordine/disordine
organizzazione
semplice/complesso
sistema
soglia
vincolo
analogico/digitale
automa
intelligenza artificiale
macchina
programma
simulazione
strumento
cervello
comportamento
e condizionamento
controllo sociale
emozione/motivazione
mente
apprendimento
autoregolazione/equilibrazione
cognizione
induzione/deduzione
innato/acquisito
istinto
operazioni
percezione
quoziente intellettuale
astronomia
cosmologie
gravitazione
luce
materia
spazio-tempo
atomo e molecola
conservazione/invarianza
entropia
fisica
forza/campo
moto
particella
plasma
propagazione
quanti
relatività
reversibilità/irreversibilità
stato fisico
atmosfera
litosfera
oceani
pianeti
sole
universo
adattamento
evoluzione
mutazione/selezione
polimorfismo
specie
cellula
differenziamento
immunità
individualità biologica
integrazione
invecchiamento
organismo
regolazione
sviluppo e morfogenesi
catalisi
macromolecole
metabolismo
omeostasi
organico/inorganico
osmosi
vita
eredità
gene
genotipo/fenotipo
razza
sangue
allegoria
codice
immagine
metafora
segno
significato
simbolo
avanguardia
classico
critica
filologia
letteratura
maniera
poetica
retorica
bello/brutto
creatività
espressione
fantastico
gusto
imitazione
immaginazione
progetto
riproduzione/riproducibilità
sensibilità
spazialità
alfabeto
ascolto
gesto
lettura
luogo comune
orale/scritto
parola
ritmo
scrittura
voce
discorso
finzione
generi
narrazione/narratività
stile
tema/motivo
testo
arti
artigianato
artista
attribuzione
oggetto
produzione artistica
anthropos
cultura/culture
etnocentrismi
natura/cultura
acculturazione
civiltà
futuro
selvaggio/barbaro/civilizzato
armonia
melodia
ritmica/metrica
scala
suono/rumore
tonale/atonale
abbigliamento
canto
corpo
danza
maschera
moda
ornamento
scena
colore
disegno/progetto
visione
escrementi
fertilità
nascita
sensi
sessualità
vecchiaia
vita/morte
educazione
generazioni
infanzia
morte
coltivazione
cultura materiale
industria rurale
materiali
prodotti
credenze
dialetto
enigma
fiaba
mostro
popolare
proverbi
tradizioni
amore
desiderio
eros
isteria
pulsione
soma/psiche
sonno/sogno
cannibalismo
dèi
divino
eroi
iniziazione
magia
messia
millennio
persona
puro/impuro
religione
sogno/visione
stregoneria
angoscia/colpa
castrazione e complesso
censura
identificazione e transfert
inconscio
nevrosi/psicosi
piacere
clinica
cura/normalizzazione
esclusione/integrazione
farmaco/droga
follia/delirio
medicina/medicalizzazione
normale/anormale
salute/malattia
sintomo/diagnosi
fuoco
homo
mano/manufatto
tecnica
utensile
ateo
chierico/laico
chiesa
diavolo
eresia
libertino
libro
peccato
sacro/profano
santità
demoni
divinazione
mito/rito
mythos/logos
origini
agonismo
cerimoniale
festa
feticcio
gioco
lutto
regalità
rito
casta
donna
endogamia/esogamia
famiglia
incesto
maschile/femminile
matrimonio
parentela
totem
uomo/donna
alimentazione
animale
cucina
domesticamento
fame
vegetale
caccia/raccolta
dono
eccedente
pastorizia
primitivo
reciprocità/ridistribuzione
borghesi/borghesia
burocrazia
classi
contadini
ideologia
masse
proletariato
rivoluzione
economia
formazione economico-sociale
lavoro
modo di produzione
proprietà
riproduzione
transizione
consenso/dissenso
egemonia/dittatura
intellettuali
libertà
maggioranza/minoranza
partiti
politica
abbondanza/scarsità
bisogno
consumo
imposta
lusso
oro e argento
pesi e misure
produzione/distribuzione
ricchezza
scambio
spreco
amministrazione
comunità
conflitto
élite
gergo
gruppo
marginalità
opinione
povertà
propaganda
ruolo/status
socializzazione
società
spazio sociale
accumulazione
capitale
crisi
distribuzione
fabbrica
gestione
imperialismo
impresa
mercato
merce
moneta
pianificazione
profitto
rendita
salario
utilità
valore/plusvalore
consuetudine
diritto
giustizia
istituzioni
responsabilità
costituzione
democrazia/dittatura
norma
patto
potere
potere/autorità
pubblico/privato
società civile
stato
abitazione
acqua
ambiente
città
clima
ecumene
insediamento
migrazione
paesaggio
popolazione
regione
risorse
suolo
terra
territorio
villaggio
agricoltura
città/campagna
colonie
commercio
industria
spazio economico
sviluppo/sottosviluppo

Logica

Deduzione/prova, Equivalenza, Formalizzazione, Logica, Possibilità/necessità, Referenza/verità, Ricorsività

1. *Il problema di Locke-Berkeley.*

S'immagini Euclide alle prese con la dimostrazione della proposizione che afferma: in ogni triangolo i tre angoli interni sono uguali a due angoli retti (è la proposizione 32 del primo libro degli *Elementi*). Tutto quello che egli ha a disposizione sono certi «postulati», essenzialmente proposizioni che affermano la possibilità di certe costruzioni geometriche (ad esempio: il primo afferma la possibilità di «tracciare una linea retta da ogni punto a ogni punto») e di certe «nozioni comuni», essenzialmente proposizioni ovviamente vere di carattere non specificamente geometrico (ad esempio: la prima afferma che «cose uguali ad una stessa cosa sono fra loro uguali»). Sia $\mathfrak{E}$ l'insieme dei postulati e delle nozioni comuni e σ la proposizione 32. Il problema di Euclide era dunque: è σ *implicata da* $\mathfrak{E}$? ovvero, è σ *una conseguenza di* $\mathfrak{E}$? Intuitivamente, questo significa chiedersi se σ è vera in ogni «stato di cose» in cui è vera ogni proposizione in $\mathfrak{E}$. Naturalmente, il modo piú naturale per stabilirlo è di costruire una dimostrazione. La miglior descrizione di Euclide al lavoro è quella data da Kant nella *Critica della ragion pura* (*Kritik der reinen Vernunft*, 1787): «Egli comincerà senz'altro a costruire un triangolo. In quanto egli sa che due angoli retti presi assieme equivalgono alla somma di tutti gli angoli contigui, che possono venire costituiti, partendo da un punto, sul semipiano limitato da una retta che contiene quel punto, egli prolunga allora un lato del suo triangolo, ed ottiene due angoli contigui, la cui somma è uguale a due angoli retti. Di questi due angoli, egli divide poi quello esterno, conducendo una linea parallela al lato opposto del triangolo, e vede sorgere cosí un angolo contiguo esterno, che è uguale ad un angolo interno, ecc. In tal modo, mediante una catena di inferenze egli giunge, sempre guidato dall'intuizione, ad una risoluzione del problema pienamente evidente, e al tempo stesso universale». Le costruzioni eseguite da Euclide sono rappresentate nella figura seguente:



Il problema che subito sorge è come possa valere per *ogni* triangolo una conclusione che Euclide stabilisce per il particolare triangolo ABC. Sia $\mathrm{Tr}(ABC)$ la proposizione che i punti ABC determinano un triangolo e $\mathrm{P}(ABC)$ che la somma degli angoli interni di ABC vale un angolo piatto. La «catena di inferenze» sviluppata da Euclide sembra al piú stabilire che la proposizione «Se $\mathrm{Tr}(ABC)$, allora $\mathrm{P}(ABC)$» segue da $\mathfrak{E}$. Ma che cosa giustifica l'inferenza da «Se $\mathrm{Tr}(ABC)$,

allora P(ABC)» a «Per ogni tripla di punti X, Y, Z, se Tr(XYZ), allora P(XYZ)», che stabilisce la conclusione voluta?

È questo il cosiddetto problema di Locke-Berkeley, alla cui soluzione è volta una delle dottrine centrali della *Critica*, e cioè quella del carattere sintetico a priori delle verità matematiche. Senza impegnarsi nel dettaglio dell'esegesi kantiana, non c'è dubbio che tale dottrina intendesse negare la riducibilità di tale tipo d'inferenza alla ✦logica✦. Naturalmente, la portata esatta di questa dottrina dipende essenzialmente dalla nozione kantiana di logica. Ora, per Kant la logica da Aristotele sino al suo tempo non aveva potuto fare nessun passo avanti e quindi, secondo ogni apparenza, sembrava essere chiusa e compiuta. E aggiungeva che il confine della logica è segnato con perfetta precisione dal fatto che essa è una scienza, la quale espone in modo circostanziato e dimostra rigorosamente null'altro che le regole formali del pensiero. In tal caso, per Kant l'inferenza in questione non poteva essere «una regola formale del pensiero» non contenendo la logica aristotelica alcuna giustificazione *generale* della sua validità.

2. *Il problema della completezza.*

È nel § 11 dell'*Ideografia* (*Begriffsschrift*, 1879) di Frege che si trova per la prima volta una tale giustificazione. Ed essa è sorprendentemente semplice una volta scelta una notazione opportuna per rappresentare le inferenze del tipo in questione. Nota Frege: per la sua validità è sufficiente sia soddisfatta una condizione puramente *formale*, e cioè che il nome ABC non ricorra in alcuna delle proposizioni in $\mathfrak{S}$. Essendo tali proposizioni generali, l'inferenza euclidea è giustificata. Inoltre, la notazione dell'*Ideografia* non consente soltanto la ✦formalizzazione✦ di questa particolare inferenza ma della totalità delle inferenze «logiche» degli *Elementi*. Entro questa notazione, afferma Frege al § 3, tutto ciò che è necessario per un'inferenza corretta è interamente espresso; ***nulla è lasciato all'intuizione***. Questo implicava due mosse essenziali: in primo luogo la formulazione precisa del linguaggio entro cui sono formulate le proposizioni alle cui conseguenze si è interessati; in secondo luogo la formulazione precisa di assiomi e regole di inferenza per i concetti «logici» del linguaggio stesso. Cosí, una dimostrazione di σ finiva per essere rappresentata da un oggetto sintattico ben definito: una sequenza finita di espressioni del linguaggio ciascuna delle quali è o un assioma logico o una espressione in $\mathfrak{S}$ oppure è ottenuta da espressioni che la precedono nella sequenza applicando una delle regole di inferenza, e di cui l'ultima è σ. Per distinguere un tale oggetto dalla dimostrazione intuitiva cui «corrisponde», lo si dirà una derivazione di σ da $\mathfrak{S}$. Si dirà che σ è derivabile da $\mathfrak{S}$ nel caso in cui esista una tale derivazione.

Si realizzava cosí un sottile, ma cruciale, slittamento nel significato della nozione intuitiva di dimostrazione (cfr. l'articolo ✦Deduzione/prova✦): dimostrare significava a questo punto semplicemente costruire un opportuno oggetto sintattico, senza alcun riferimento ai significati delle espressioni coinvolte. Venivano in tal modo dissociate la componente sintattica e quella semantica implicite

nella nozione intuitiva di dimostrazione. Questo «divorzio» sta all'origine di larga parte dei problemi e dei risultati della ✦logica✦ contemporanea. Non fu però Frege a riconoscere le sue profonde conseguenze; questo riconoscimento è il risultato di un lungo processo che si sviluppò nei cinquant'anni successivi alla pubblicazione dell'*Ideografia* e che ebbe come protagonisti Löwenheim, Skolem, Hilbert e la sua scuola, e soprattutto Gödel.

Si consideri ora il caso particolare in cui $\mathfrak{S}$ è un insieme vuoto di proposizioni, in cui cioè per la derivazione di σ non è necessario alcun assioma «extra-logico». Era ovviamente una condizione necessaria per la correttezza della nozione fregeana di derivazione che non vi fosse alcuna proposizione σ tale che sia σ sia la sua negazione fossero derivabili dall'insieme vuoto di proposizioni. Sfortunatamente, nel 1900, in una lettera a Frege, Russell costruí proprio una proposizione di questo tipo: il sistema di assiomi «logici» di Frege era contraddittorio! Ci vollero dieci anni perché Russell e Whitehead riuscissero a rivedere il sistema di Frege in modo da bloccare la derivazione del «paradosso di Russell». Il sistema risultante è quello dei *Principia Mathematica* (1910). Ora, anche assumendone la non-contraddittorietà, restava aperto un altro importante problema, detto problema della completezza, che Gödel formulava all'inizio del suo *La completezza degli assiomi del calcolo logico delle funzioni* (*Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, 1930) nel modo seguente: «Whitehead e Russell, come è noto, hanno costruito la logica e la matematica prendendo inizialmente certe proposizioni evidenti come assiomi e derivando da esse i teoremi della logica e della matematica per mezzo di principî di inferenza precisamente formulati in modo puramente formale (senza cioè far riferimento al significato dei simboli). Naturalmente, quando si segue una tale procedura sorge immediatamente il problema se il sistema di assiomi inizialmente postulato e i principî di inferenza siano completi, cioè se effettivamente bastino per la derivazione di ogni proposizione logico-matematica vera, oppure se, forse, è concepibile che vi siano proposizioni vere (e persino dimostrabili per mezzo di altri principî) che non sono dimostrabili nel sistema in esame».

Piú in generale, e cioè per $\mathfrak{S}$ non necessariamente vuoto, il problema di Gödel assume la forma seguente:

(1) È σ derivabile (diciamo nel senso dei *Principia*) da $\mathfrak{S}$ nel caso in cui σ sia una conseguenza di $\mathfrak{S}$?

Naturalmente, una soluzione dipendeva in modo essenziale dall'interpretazione delle nozioni intuitive di verità e di conseguenza.

3. *La logica del prim'ordine.*

Un contributo importante in questa direzione era stato dato molto tempo prima da Bolzano nei §§ 146-55 della sua *Dottrina della scienza* (*Wissenschaftslehre*, 1837). Bolzano notava che in ogni data proposizione si possono considerare alcune delle «idee» (il termine è di Bolzano) in essa contenute come «variabili»

e le rimanenti come «costanti». In tal caso, la sostituzione delle idee variabili con altre dello stesso tipo può trasformare la proposizione data in una proposizione *vera* oppure in una proposizione *falsa*. Si supponga ora che siano dati un insieme di proposizioni A, B, C, ... e una proposizione X, e si supponga inoltre che tutte le idee, la cui sostituzione alle idee variabili i, j, ... trasforma A, B, C, ... in proposizioni vere, abbiano la caratteristica di trasformare anche X in una proposizione vera. In tal caso, continuava Bolzano, la proposizione X è *deducibile* alle proposizioni A, B, C, ... rispetto alle parti variabili i, j, ... Connettendo subito dopo la sua nozione «tecnica» all'uso ordinario, egli concludeva che in tali circostanze è abituale dire che la proposizione X *segue*, oppure può essere *inferita* o *derivata*, dalle proposizioni A, B, C, ... Cosí, molto prima che Frege isolasse nell'*Ideografia* la componente sintattica della nozione di dimostrazione, Bolzano aveva isolato nella *Dottrina della scienza* la sua componente semantica. La differenza tra i loro risultati è essenzialmente una differenza di precisione. Infatti, Bolzano non aveva alcuna definizione precisa proprio dei concetti chiave di idea e di verità. Inoltre, la sua definizione di conseguenza sembrava minacciata da una pericolosa relatività, e cioè dalla sua dipendenza da quali idee vengano scelte come variabili. Bolzano stesso notava (§ 147) che, accrescendo indefinitamente il numero di idee considerate variabili in una data classe Γ di proposizioni, nessuna proposizione non in Γ seguirà da Γ. Naturalmente, il caso speciale piú interessante di tale nozione è quello di conseguenza *logica*, e cioè quello in cui vengono considerate variabili soltanto le «idee» extra-logiche. Ma di nuovo, ammetteva Bolzano al § 148, nemmeno questa distinzione è stabile, poiché l'intero dominio di concetti appartenenti alla logica non è circoscritto in maniera tale che non possano a volte sorgere delle controversie.

La nozione di logica del prim'ordine, che compare per la prima volta negli scritti di Peirce alla fine dell'Ottocento e che viene precisata nel corso di un lungo processo le cui due tappe piú importanti sono forse i *Fondamenti della logica teorica* di Hilbert e Ackermann (*Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) e *The Concept of Truth in Formalized Languages* di Tarski (traduzione inglese dell'originale polacco pubblicato nel 1930-31), costituisce uno strumento essenziale per mettere un po' d'ordine in questa delicata faccenda.

La logica del prim'ordine si costruisce semplicemente *dando per scontato* il carattere logico di una ristretta famiglia di concetti. Questa non è naturalmente una giustificazione della scelta, ma solo un punto di partenza. Essi si riducono a quelli di congiunzione, rappresentato dal simbolo «&»; disgiunzione, «$\vee$»; negazione, «$\neg$»; implicazione, «$\rightarrow$»; esistenza, «$\exists$»; e universalità, «$\forall$». Si suppone inoltre che sia data una lista infinita di variabili, $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$, che svolgono essenzialmente il ruolo di pronomi. Oltre a tali simboli, se ne tratterà solo un altro, «I», come parte costante del linguaggio considerato. Esso rappresenterà il concetto di identità; «xIy» significherà cioè che $x = y$. Secondo il dominio di oggetti U di cui s'intende parlare, possono aversi ulteriori simboli detti extralogici, di tre tipi: 1) predicativi, per rappresentare relazioni tra elementi di U; 2) funzionali, per rappresentare funzioni che associano a n elementi di U un elemento di U; e 3) individuali, per rappresentare elementi di U. Si supponga che

l'unico simbolo di questo tipo sia il simbolo predicativo a due posti «R». Questo significa che le «espressioni di base», le formule atomiche, saranno del tipo «xRy» oppure «xIy». Le ulteriori espressioni saranno formate a partire da queste ultime applicando un numero finito di volte i simboli che rappresentano i concetti logici. Si otterranno cosí ad esempio

(2) $(\exists x)(\forall y)\, xRy$

(3) $(\exists x)(\forall y)\,((xIy) \vee (xRy))$.

Le espressioni cosí ottenute saranno dette formule (del prim'ordine). Esse si trasformeranno in proposizioni vere o false a seconda del modo in cui si sceglie il dominio di oggetti U e si interpreta «R», essendo per ipotesi già fissate le interpretazioni di «$\exists$», «$\forall$», «$\vee$» e «I». Cosí, scegliendo U come l'insieme dei numeri naturali e interpretando «R» come quell'insieme di coppie di elementi di U, (a, b), tali che a è minore di b, la (1) dà luogo alla proposizione falsa che un numero naturale è minore di tutti (falsa perché nessun numero naturale può essere minore di se stesso); la (3) dà invece luogo alla proposizione vera che un numero naturale è minore di tutti *gli altri*.

Come si vede, in questo esempio i «quantificatori», e cioè «$\exists$» e «$\forall$», sono stati fatti «variare» su *elementi* di U; il loro «campo di valori» è stato cioè ristretto a tali elementi. Si consideri ora un simbolo predicativo ad un posto, «P», e lo si tratti come una variabile, in modo da ammettere tra le espressioni ad esempio anche «$(\exists P)(\forall x)\neg Px$». In tal caso, il campo di valori di «$\exists$» sarà costituito dai sottoinsiemi di U e «$(\exists P)(\forall x)\neg Px$», comunque si fissi U, esprimerà la proposizione vera che esiste un sottoinsieme di U cui nessun elemento di U appartiene. La logica in cui ai quantificatori viene consentito di variare anche su sottoinsiemi arbitrari di (o relazioni su) U viene detta logica del second'ordine. Vi sono naturalmente possibilità intermedie in cui il campo di valori include non sottoinsiemi arbitrari di U ma solo i sottoinsiemi *finiti* di U oppure i numeri naturali; in tal caso si parla rispettivamente di logica del second'ordine debole e di ω-logica.

Un esempio darà un senso piú concreto dei «poteri espressivi» della logica del prim'ordine, di «ciò che si può dire» *limitando* le risorse espressive a quelle del prim'ordine. Si supponga di essere interessati a un dato dominio di oggetti U e di voler dire che un ben definito sottoinsieme P di U è finito. Si aggiunga allora al corredo di simboli un simbolo extra-logico «P», a un posto, la cui interpretazione sarà tale sottoinsieme P di U. Ora, dire di P che è finito equivale a dire che esiste un numero naturale n, tale che P ha al massimo n membri (o piú tecnicamente, tale che la cardinalità di P è al massimo n). Non è allora difficile vedere che la formula seguente esprime al prim'ordine l'affermazione che P ha cardinalità al massimo n (per $n = 1, 2, 3, \ldots$):

(4) $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\,(Px_1 \& \ldots \& Px_n \& (\forall x_{n+1})\,(Px_{n+1} \rightarrow (x_{n+1} I x_n \vee \ldots \vee x_{n+1} I x_1)))$

(Tali formule vengono denotate con «$P^{\leq n}$»). La prima parte della (4) afferma che in U esistono n individui, non necessariamente distinti, che appartengono a P; la seconda parte (quella che inizia con «$(\forall x_n)$») aggiunge che ogni individuo in

P coincide con uno di tali n individui. Dunque, la (4) sarà vera rispetto a un dato U e a una data interpretazione di «P», diciamo P, se e solo se P ha al massimo n elementi. Si dice cosí che la nozione di insieme di cardinalità minore o uguale a n è caratterizzabile, o assiomatizzabile, al prim'ordine. Ma lo è anche quella di insieme finito arbitrario? Dire che lo è significa dire:

(5) Esiste un insieme di formule del prim'ordine, diciamo Γ, tale che le formule in Γ sono vere in *tutte e sole* le interpretazioni che assegnano a «P» un sottoinsieme finito di U.

Naturalmente, deve trattarsi di un insieme Γ specificato in modo effettivo. Se invece dovesse valere che

(6) Per ogni insieme di formule del prim'ordine vere in ogni interpretazione che assegna a «P» un sottoinsieme *finito* di U, esiste anche un'interpretazione che assegna a «P» un sottoinsieme *infinito* di U e in cui esse sono pure vere,

allora si dovrebbe concludere che la nozione d'insieme finito non è caratterizzabile, o assiomatizzabile, al prim'ordine. Il candidato piú ovvio è l'insieme Γ che consiste della sola formula $(\exists n)(P^{\leq n})$, la quale afferma appunto che esiste un numero naturale n, tale che P ha al massimo n elementi. Ma questa non è una formula del prim'ordine! Questo primo fallimento non è ancora una dimostrazione della (6), tanto piú che è noto che la nozione di insieme infinito, nei cui termini è immediatamente definibile quella di insieme finito, è caratterizzabile al prim'ordine.

4. *Verità e conseguenza.*

Per risolvere questo problema, occorre tornare alla proposizione (1). Si vedrà infatti che la verità della (6) segue dalla verità della (1). Ma la (1) è vera? Per stabilirlo, è essenziale dare una versione precisa delle nozioni intuitive di verità e di conseguenza. Ma una tale versione è già implicita nella discussione del paragrafo precedente.

Sia ora $\mathfrak{S}$ un insieme arbitrario di formule del prim'ordine e σ una formula arbitraria del prim'ordine. Una interpretazione per $\mathfrak{S} \cup \{\sigma\}$ è una struttura insiemistica $\mathfrak{S} = (\mathrm{U}, \mathrm{f})$, dove U è un insieme non-vuoto arbitrario e f una funzione che assegna un riferimento a ciascuno dei simboli extra-logici in $\mathfrak{S} \cup \{\sigma\}$ come segue: 1) ai simboli predicativi a n posti sottoinsiemi di n-ple di elementi di U, $n = 1, 2, 3, \ldots$; cosí, se «P» è a un posto, $\mathrm{f}(P)$ è un sottoinsieme di U, se è a due posti, $\mathrm{f}(P)$ è un insieme di coppie di elementi di U, e cosí via; 2) ai simboli funzionali a n argomenti funzioni dall'insieme di tutte le n-ple di elementi di U in U; 3) ai simboli individuali elementi di U.

Ogni data interpretazione $\mathfrak{S}$ viene estesa alle formule in $\mathfrak{S} \cup \{\sigma\}$ specificando 1) un'assegnazione $\mathfrak{s}$ di elementi di U alle variabili e 2) la nozione di verità in $\mathfrak{S}$ rispetto a $\mathfrak{s}$. Si consideri ad esempio la formula «Rxy», dove «R» è un simbolo

predicativo a due posti. Date un'interpretazione $\mathfrak{S}$ e un'assegnazione $\mathfrak{s}$, si dirà che «xRy» è vera in $\mathfrak{S}$ rispetto a $\mathfrak{s}$ se e solo se la coppia di elementi di $\mathfrak{S}$, per esempio (a, b), assegnati da $\mathfrak{s}$ a «x» e «y», appartiene all'insieme di coppie ordinate di elementi di U assegnato da f a «R». Cosí, si dirà che $(\sigma \& \tau)$ è vera in $\mathfrak{S}$ rispetto ad $\mathfrak{s}$ se e solo se lo sono sia σ sia τ, e che $\neg\sigma$ è vera in $\mathfrak{S}$ rispetto ad $\mathfrak{s}$ se e solo se non lo è σ. Infine, per le formule quantificate, si consideri ad esempio «$(\exists x)\, xRy$». Si dirà che è vera in $\mathfrak{S}$ rispetto ad $\mathfrak{s}$ se e solo se «xRy» è vera in $\mathfrak{S}$ rispetto ad almeno un'assegnazione $\mathfrak{s}'$ che differisce da $\mathfrak{s}$ al massimo rispetto all'elemento che essa assegna a «x». Si supponga ora che σ sia una formula «chiusa», nel senso che tutte le variabili in essa occorrenti sono «governate» da quantificatori. (Cosí, in «$(\exists x)\, xRy$» la variabile «x», ma non la variabile «y» è «governata» da un quantificatore). In tal caso, per σ vi saranno solo due possibilità: o *ogni* assegnazione $\mathfrak{s}$ rende vera σ in $\mathfrak{S}$ oppure *nessuna* assegnazione $\mathfrak{s}$ rende vera σ in $\mathfrak{S}$. Nel primo caso, σ viene detta vera in $\mathfrak{S}$, nel secondo, falsa in $\mathfrak{S}$. Piú in generale, dato un insieme $\mathfrak{S}$ di formule chiuse, si dice che un'interpretazione $\mathfrak{S}$ è *modello* di $\mathfrak{S}$ se e solo se ogni formula in $\mathfrak{S}$ è vera in $\mathfrak{S}$.

Cosí ad esempio nel caso di $P^{\leq n}$ precedentemente considerato, le sue interpretazioni saranno strutture $\mathfrak{S} = (\mathrm{U}, \mathrm{f})$, dove $\mathrm{f}(P)$ è un sottoinsieme di U. Quel che si è visto è che $\mathfrak{S}$ è un modello di $P^{\leq n}$ se e solo se $\mathrm{f}(P)$ ha al massimo n elementi. Quel che non si sa ancora è se esista un insieme di formule Γ tale che $\mathfrak{S}$ è un modello di Γ se e solo se $\mathrm{f}(P)$ è finito. Infine, si dice che $\mathfrak{S}$ è *soddisfacibile* se e solo se $\mathfrak{S}$ ha un modello (cioè esiste un'interpretazione che è modello di $\mathfrak{S}$); e σ è una *conseguenza del prim'ordine di* $\mathfrak{S}$ se e solo se ogni modello di $\mathfrak{S}$ è anche un modello di σ (cioè se e solo se σ è vera in ogni interpretazione in cui è vera ogni formula di $\mathfrak{S}$). Per asserire che σ è una conseguenza del prim'ordine di $\mathfrak{S}$, si scrive.

(7) $\mathfrak{S} \models_I \sigma$.

È uno dei contributi dell'articolo di Tarski già citato l'aver dato una versione matematicamente precisa di questa famiglia di concetti (riferimento, verità, conseguenza; cfr. l'articolo ♦Referenza/verità♦). Certo, essa incorporava una teoria del significato che non era filosoficamente neutrale, e cioè la teoria, già formulata da Frege e nota come teoria *classica*, secondo cui, come afferma Brouwer, indipendentemente dal pensiero umano, esiste una *verità*, parte della quale è esprimibile per mezzo di enunciati detti «proposizioni vere». Usando il termine 'falso' per 'converso del vero', la teoria classica assume che, in virtú del cosiddetto «principio del terzo escluso», ciascun asserto è vero o falso indipendentemente dalla possibilità di qualunque essere umano di riconoscerlo come tale. È in questo senso che la logica del prim'ordine nella versione considerata viene detta «classica». L'attacco di Brouwer e della sua scuola (soprattutto Heyting) a queste assunzioni ha dato luogo, a partire dal 1930, alla principale «alternativa» attualmente disponibile alla logica classica, quella intuizionista. Qualche anno dopo, nel 1936, considerazioni di carattere diverso, essenzialmente «fisiche», portavano Birkhoff e Neumann a formulare una seconda interessante «alternativa»: la cosiddetta logica quantistica. Il dibattito sul senso in cui tali logiche sono davvero alternative alla logica «classica» è tutt'ora aperto.

5. *I teoremi di compattezza e di Löwenheim-Skolem.*

La nozione di ◆logica◆ del prim'ordine è anche uno strumento per comprendere meglio la nozione di derivabilità di Russell. Consente in particolare di scoprire che non tutti gli assiomi «logici» di Russell sono del prim'ordine e dunque di «isolare» entro questa nozione il suo «frammento» del prim'ordine. È proprio questo uno dei contributi del lavoro di Hilbert e Ackermann già citato. Certo, la nozione risultante di derivabilità era particolarmente «artificiale», non «rappresentava» cioè fedelmente l'effettivo modo di procedere delle ordinarie dimostrazioni matematiche. Cosí, nel 1934, nelle sue *Ricerche sulla deduzione logica* (*Untersuchungen über das logische Schliessen*), Gentzen affermava: «Il mio punto di partenza è stato questo: la formalizzazione della deduzione logica, in particolare come è stata sviluppata da Frege, Russell e Hilbert, si discosta alquanto dalle forme di deduzione usate nella pratica delle dimostrazioni matematiche. Al contrario, io ho inteso principalmente fornire un sistema che fosse il piú vicino possibile all'effettivo ragionamento. Il risultato è stato un "calcolo della deduzione naturale"». Inteso da Gentzen essenzialmente come uno strumento per realizzare il cosiddetto programma di Hilbert, e cioè per dimostrare con metodi epistemologicamente «sicuri» la non-contraddittorietà della matematica classica, scossa dal paradosso di Russell e minacciata dalla critiche degli intuizionisti, esso divenne poi – a partire dagli anni '60 e grazie soprattutto ai contributi di Prawitz e Kreisel – uno strumento estremamente potente per l'analisi della nozione generale di dimostrazione.

Il calcolo della deduzione naturale dava naturalmente luogo ad una nozione di derivabilità estensionalmente equivalente sia al frammento del prim'ordine di quella di Russell, sia a quella di Hilbert. Perciò, agli effetti della (1) non ha importanza quale viene considerata. Si scriverà allora

(8) $\mathfrak{S} \vdash_{I} \sigma$,

per asserire indifferentemente che σ è derivabile da $\mathfrak{S}$, nel senso di Gentzen o di Hilbert, o in qualunque altro senso equivalente. In tal caso, una riformulazione della (1) è la seguente:

(9) Se $\mathfrak{S} \models_{I} \sigma$, allora $\mathfrak{S} \vdash_{I} \sigma$.

L'estensione al second'ordine della nozione di conseguenza del prim'ordine è estremamente «naturale»: la si ottiene semplicemente aggiungendo le ovvie condizioni di verità per le formule in cui i quantificatori variano su sottoinsiemi di (o relazioni su) U. Nonostante si tratti di una estensione «naturale», la differenza tra le due nozioni è drammatica. Il riconoscimento di questa differenza è interamente dovuto a Gödel. Nel già citato articolo del 1930, egli dimostrò infatti che la (9) è vera, e cioè che esiste una procedura di dimostrazione *completa* per la logica del prim'ordine; l'anno successivo dimostrò invece che *non* esiste una procedura completa per la logica del second'ordine, e cioè che la nozione di conseguenza del second'ordine *non è formalizzabile*.

Il teorema di completezza del 1930 ristabiliva cosí, almeno al prim'ordine, l'armonia perduta tra la componente sintattica e semantica della nozione intuitiva di dimostrazione. In piú, come ha notato Kreisel, dal risultato di Gödel conseguiva anche l'adeguatezza della nozione formale di conseguenza del prim'ordine rispetto a quella intuitiva, naturalmente ristretta a formule del prim'ordine, rappresentata qui con «$\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$». Intuitivamente, lo si è già notato, «$\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$» significa che σ è vera in ogni «stato di cose» in cui è vera ogni formula in $\mathfrak{S}$. Ora, benché si possa riconoscere che

(10) Se $\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$, allora $\mathfrak{S} \models_{I} \sigma$,

dato che le strutture insiemistiche costituiscono tipi particolari di «stati di cose», non è affatto ovvio il riconoscimento del converso della (10),

(11) Se $\mathfrak{S} \models_{I} \sigma$, allora $\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$,

che implica che, almeno al prim'ordine, la nozione di struttura insiemistica «esaurisce» quella di «stato di cose».

Si assuma allora che valga

(12) $\mathfrak{S} \models_{I} \sigma$.

Questo implica, per la (9),

(13) $\mathfrak{S} \vdash_{I} \sigma$.

Dato che non vi sono dubbi sul fatto che

(14) Se $\mathfrak{S} \vdash_{I} \sigma$, allora $\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$,

(13) e (14) implicano infine

(15) $\mathfrak{S} \models_{i} \sigma$.

Dunque, la (12) implica la (15); perciò, data la (10), al prim'ordine, nozione intuitiva e nozione formale di conseguenza coincidono, cioè la nozione formale è adeguata rispetto a quella intuitiva. Ma, in tal caso, di nuovo per la (9) la logica del prim'ordine ammette una procedura di dimostrazione completa non solo rispetto alla relazione formale di conseguenza, ma anche a quella intuitiva.

Tuttavia, come spesso accade, qualità eccellenti generano difetti preoccupanti. Vediamo come. Riformuliamo in primo luogo con maggiore precisione la (6) come segue:

(16) Per ogni insieme di formule chiuse del prim'ordine, ad esempio Γ, se ogni formula in Γ è vera in ogni interpretazione (U, f) tale che f(P) è finito, allora esiste un'interpretazione (U′, f′) tale che f′(P) è infinito e ciascuna formula in Γ è vera in (U′, f′).

Ora, non è difficile vedere che il corollario del teorema di completezza detto teorema di compattezza o finitezza, o ancora di Gödel-Malčev (« Se ogni sottoinsieme *finito* di $\mathfrak{S}$ ha un modello, allora lo stesso $\mathfrak{S}$ ha un modello »), implica la verità della (16). Sia infatti Γ come nell'ipotesi della (16). Sia $a_1, a_2, \ldots$ una lista di simboli individuali nessuno dei quali ricorre in formule di Γ. Si consideri l'insieme Γ' che risulta da Γ aggiungendo a Γ ogni formula della forma

(17) $\quad Pa_i \,\&\, Pa_j \,\&\, \neg(a_i I a_j) \qquad$ per $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

Tali formule vengono denotate con « G_{ij} ». Ora, che ogni sottoinsieme *finito* di Γ' abbia un modello, segue dall'ipotesi della (16); segue allora dal teorema di compattezza che lo stesso Γ' ha un modello $\mathfrak{S}' = (\mathrm{U}', \mathrm{f}')$. Ma $f'(P)$ deve essere infinito, poiché altrimenti qualche G_{ij} sarebbe falsa in $\mathfrak{S}'$. Ma Γ è un sottoinsieme di Γ'. Dunque, $\mathfrak{S}'$ è un modello anche di Γ.

Questo stabilisce che la nozione d'insieme finito non è caratterizzabile al prim'ordine. Tale risultato non è isolato. L'idea di fondo della sua dimostrazione può essere sfruttata per ottenere una vasta serie di risultati di non-caratterizzabilità: si scopre cosí che non possono essere espresse al prim'ordine le nozioni di insieme *numerabilmente* infinito (di insieme cioè con la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali), di insieme bene ordinato, di gruppo abeliano di torsione... Questi risultati implicano naturalmente drastiche limitazioni sui poteri espressivi della logica del prim'ordine. Ma non basta. Ulteriori risultati limitativi seguivano da un altro importante teorema, originariamente dimostrato da Löwenheim e quindi raffinato e generalizzato da Skolem, detto appunto di Löwenheim-Skolem, la cui dimostrazione è implicita in quella che Gödel diede della (9). Esso afferma: « Se un insieme di formule del prim'ordine ha un modello, allora ha un modello *numerabilmente* infinito oppure finito ».

Le sue conseguenze « negative » riguardano in particolare le nozioni di numero reale e di numero naturale. Diversamente ad esempio dalle nozioni algebriche di gruppo o di corpo, che per natura ammettono una varietà di « realizzazioni » concrete essenzialmente diverse, intuitivamente sia quella di numero reale sia quella di numero naturale sembrano univoche, sembrano cioè ammettere un'unica interpretazione, a meno di « isomorfismi », dove, per prendere il caso piú semplice, due interpretazioni per una formula in cui ricorre un simbolo predicativo a due posti, « R », per esempio (U, f) e (U′, f′), vengono dette *isomorfe* se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca F tra gli elementi di U e quelli di U′ tale che $a\mathrm{f}(R)\,b$ se e solo se $\mathrm{F}(a)\,\mathrm{f}'(R)\,\mathrm{F}(b)$. Intuitivamente, interpretazioni isomorfe differiscono semplicemente per il fatto di assegnare nomi diversi agli « stessi » individui; sono dunque matematicamente indistinguibili. Ne segue che se un'interpretazione è modello di un insieme di formule, lo saranno anche tutte le interpretazioni ad essa isomorfe. Cosí, l'unico tipo di univocità che ci si può mai aspettare è quello in cui tutti i modelli sono isomorfi. Bene: il teorema di Löwenheim-Skolem implica precisamente che proprio questo tipo di univocità è destinato ad eludere qualunque caratterizzazione al prim'ordine delle due nozioni: ogni caratterizzazione di questo tipo ammetterà cioè interpretazioni « non intese », non isomorfe all'interpretazione « normale », che è invece l'unica a sopravvivere al second'ordine. Questo significa: solo al second'ordine si possono caratterizzare le nozioni di numero naturale e di numero reale.

Tuttavia, questi risultati « negativi » hanno un lato « positivo »: i metodi impiegati per ottenerli, opportunamente sviluppati, stanno all'origine di una branca della logica, la teoria dei modelli, che si è rivelata un potente strumento per accrescere la nostra ordinaria conoscenza matematica, e cioè per risolvere problemi formulati nell'ordinario linguaggio matematico. Un esempio interessante è la soluzione ottenuta da Ax e Kochen (1965-66), applicando tali metodi, di un problema « puramente » matematico sollevato da Artin venticinque anni prima. Per questo, Ax e Kochen ebbero nel 1967 il Cole Prize nella teoria dei numeri per il miglior risultato ottenuto in questo campo negli ultimi cinque anni.

Un altro sviluppo « puramente » matematico ottenuto con questi stessi metodi è la cosiddetta analisi non-standard di Abraham Robinson, che consente una riformulazione rigorosa dell'ordinaria analisi matematica in termini di infinitesimi.

Ma anche il filosofo riluttante nell'assumere ontologie sovrabbondanti ha di che gioire di questi risultati « negativi ». Vediamo perché. Un caso speciale importante della nozione di conseguenza del prim'ordine è quello in cui $\mathfrak{S}$ è l'insieme vuoto di espressioni, denotato da « $\varnothing$ ». Che significa « $\varnothing \models_I \sigma$ »? Significa semplicemente che σ è vera in ogni struttura insiemistica. Ma si è già visto che « vero in ogni struttura insiemistica » è una versione precisa di « vero in ogni stato di cose » o, come si potrebbe anche dire, « vero in ogni mondo possibile ». Da Leibniz fino a Wittgenstein, come « vere in ogni mondo possibile » sono state considerate le *verità logiche*. Si dice cosí che σ è una verità logica se e solo se $\varnothing \models_I \sigma$.

Ma c'è davvero bisogno di mobilitare l'intero apparato della teoria degli insiemi per caratterizzare la nozione di verità logica? Proprio il teorema di Löwenheim-Skolem (oltre a quello di completezza) consente una risposta negativa. Lo si consideri nella versione di Hilbert-Bernays:

(18) Se una formula si trasforma in una formula aritmetica vera per ogni sostituzione delle sue formule atomiche con formule aritmetiche, allora essa è vera in ogni interpretazione (cioè è una verità logica).

La formula menzionata nell'ipotesi del teorema di Hilbert-Bernays s'intende del prim'ordine *senza identità*; per formula aritmetica s'intende una formula del prim'ordine costruita a partire da formule atomiche del tipo: « tIu », dove « t » e « u » sono espressioni in cui ricorrono solo variabili, oltre a « $+$ » e « $\times$ », nella loro interpretazione ordinaria. Naturalmente, tra i valori delle variabili di quantificazione, *dopo la sostituzione*, occorre includere anche i numeri naturali. D'altra parte, utilizzando il teorema di completezza, si dimostra che, fissato un arbitrario insieme non vuoto Δ di formule del prim'ordine *interpretate*,

(19) Se σ è una verità logica, allora σ si trasforma in una formula vera per ogni sostituzione delle sue formule atomiche con formule in Δ.

La (18) e la (19) implicano immediatamente l'equivalenza della definizione insiemistica rispetto a quella «sostituzionale» di verità logica, purché l'insieme fissato Δ sia sufficientemente ricco da contenere tutte le formule aritmetiche.

Secondo il Quine della *Philosophy of Logic* (1970), vi è una netta convenienza filosofica nell'attenersi a questa definizione sostituzionale; in tal modo, si economizza sull'ontologia. Invece di un universo di insiemi specificabili e non-specificabili, bastano gli enunciati, e cioè formule interpretate, persino del linguaggio oggetto. Tuttavia, per riconoscere questo fatto si è costretti a fare un uso essenziale proprio di quelle nozioni che s'intende bandire.

6. *I teoremi d'incompletezza.*

Molto prima di Quine, nel 1930, Hilbert aveva avanzato una proposta nello stesso spirito, ma ancor piú radicale, per definire la nozione di verità logica. Invece di far riferimento a formule aritmetiche *vere*, Hilbert aveva supposto che fosse sufficiente far riferimento a formule aritmetiche *derivabili entro un particolare sistema formale* (noto come «Z»). Cosí, la definizione, interamente sintattica, proposta da Hilbert identificava le verità logiche con le formule tali che tutti i loro esempi di sostituzione sono derivabili in Z.

È una delle molte conseguenze della dimostrazione che Gödel diede del fatto che la nozione di conseguenza del second'ordine non è formalizzabile, e cioè del primo teorema d'incompletezza, che tale definizione di Hilbert è *inadeguata*; esso implicava infatti che la nozione di verità aritmetica è irriducibile a quella formula derivabile entro un particolare sistema formale.

È già stato notato che al second'ordine la nozione di numero naturale è univoca, esiste cioè un insieme di formule Γ (dette assiomi di Peano), tale che un'interpretazione è modello di Γ se e solo se è isomorfa all'usuale struttura dei numeri naturali. Perciò, data una formula aritmetica σ, sarà esclusa l'eventualità tipica del prim'ordine che essa sia vera in alcune interpretazioni e falsa in altre: σ sarà vera o in tutte o in nessuna. Perciò, per dimostrare che non esiste una procedura di dimostrazione completa al second'ordine, sarà sufficiente costruire una formula σ tale che né σ né la sua negazione sono derivabili da Γ. Precisamente, una formula di questo tipo costruí Gödel nel suo articolo del 1931 sulle *Proposizioni formalmente indecidibili dei Principia mathematica e di sistemi affini* (*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter systeme*), il cui risultato principale Gödel stesso riassumeva cosí nel 1930: «Se agli assiomi di Peano si aggiunge la logica dei *Principia Mathematica*... si ottiene un sistema formale S per cui vale il seguente teorema: "Il sistema S *non* è completo; cioè esso contiene proposizioni A (che si possono effettivamente costruire) tali che né A né $\neg A$ sono dimostrabili"».

Naturalmente, questo risultato vale sotto l'ipotesi della non-contraddittorietà (o, come anche si dice, della consistenza) di S. Tuttavia, e questo è il secondo teorema d'incompletezza, Gödel dimostrò che tale ipotesi non è dimostrabile in S: «Anche se si ammettono tutti i metodi logici dei *Principia* (e dunque in particolare la logica del second'ordine e l'assioma di scelta)... *non* esiste una *dimostrazione di consistenza* per il sistema S... Perciò, una dimostrazione di consistenza per il sistema S può essere svolta solo per mezzo di modi di inferenza che non sono formalizzati nel sistema S stesso».

Infine, in una nota aggiunta nel 1963 all'articolo citato sulle *Proposizioni formalmente indecidibili*, Gödel affermava che era ormai possibile dare una versione completamente generale del primo e del secondo teorema di incompletezza. I successivi lavori di Turing, notava Gödel, consentivano infatti di dare una definizione precisa e adeguata della nozione generale di sistema formale sulla cui base diventava dimostrabile in modo rigoroso che in *ogni* sistema formale consistente che contenga una certa quantità di teoria dei numeri finitaria esistono proposizioni indecidibili, e cioè proposizioni A tali che né A né $\neg A$ sono dimostrabili, e che inoltre la consistenza di ciascuno di tali sistemi non può essere dimostrata entro il sistema stesso.

Poteva a questo punto rimanere, soprattutto nei matematici, ancora un disagio: il metodo gödeliano per costruire proposizioni indecidibili dava luogo a proposizioni di nessun interesse per l'effettiva pratica matematica. In ogni caso, il loro contenuto intuitivo era l'asserzione della loro stessa non-dimostrabilità. Un recente risultato di Paris e Harrington ha però sistemato per il meglio anche questa faccenda, presentando un teorema «ragionevolmente naturale di combinatoria finita», che, «benché vero, non è dimostrabile nell'aritmetica di Peano».

Non solo i risultati del 1931, ma gli stessi metodi impiegati per ottenerli ebbero in seguito sviluppi di straordinaria importanza (logica, matematica e filosofica). Tra questi forse il principale è quello dell'«aritmetizzazione», che consente di «tradurre» in termini puramente aritmetici nozioni di carattere sintattico come quella di derivabilità. Lo strumento essenziale per operare questa traduzione fu messo a punto dallo stesso Gödel: si tratta della nozione di funzione ricorsiva, già utilizzata in precedenza da Dedekind, Skolem, Hilbert e Ackermann ma di cui Gödel per primo diede una definizione precisa. Generalizzata dallo stesso Gödel nel 1934, seguendo un suggerimento che Herbrand gli aveva dato in una lettera del 1931, essa costituisce attualmente, anche grazie ai contributi (1936-37) di Post, Kleene, Church e Turing, la miglior esplicazione della nozione intuitiva di operazione o procedura meccanica. Secondo Gödel, l'importanza di questa nozione è largamente dovuta al fatto che con essa si è per la prima volta riusciti a dare una definizione assoluta, che non dipende cioè dal formalismo scelto, di una nozione epistemologicamente interessante. Da questo punto di vista, il primo teorema d'incompletezza può essere riformulato in modo particolarmente suggestivo: non esiste alcuna procedura meccanica in grado di generare tutte e sole le verità aritmetiche. Come ha notato Kreisel, questa scoperta non è certo inconsistente con la convinzione intuitiva che il ragionamento matematico non è meccanizzabile. È anzi proprio questa convinzione a rendere interessante la scoperta di regole formali adeguate per certe branche elementari della matematica come i ragionamenti puramenti logici concernenti i quantificatori o la geometria euclidea elementare: la scoperta mostra che, dopo tutto, alcune parti della matematica sono meccanizzabili.

Negli anni successivi, intorno a questa nozione di procedura o operazione meccanica, si è sviluppata una branca della logica, nota come teoria della ♦ricorsività♦, i cui metodi hanno consentito una nuova impressionante serie di risultati positivi e negativi circa la decidibilità di una vasta classe di sistemi formali. Tuttavia, come ha notato Matijasévič, questi risultati non sono puramente matematici, poiché implicano nella loro stessa formulazione nozioni logiche come quella di teoria assiomatica o di procedura meccanica. Ora, però, grazie ai contributi dello stesso Matijasévič, oltre che di Davis, Putnam e Robinson, sono disponibili anche risultati puramente matematici ottenuti con tali metodi: ci si riferisce in particolare alla soluzione negativa per il decimo problema di Hilbert che segue da tali contributi.

7. *La logica modale.*

Non solo la matematica ha tratto vantaggi dalla famiglia di concetti sviluppata da Gödel nel suo articolo del 1931, ma anche quella estensione della logica del prim'ordine, nota come ♦logica♦ modale, che risulta dalla prima trattando come concetti «logici» anche le nozioni di ♦possibilità/necessità♦. Sviluppata da Aristotele nel *Dell'espressione*, stagnante dopo il 1400, è rinata con Lewis nel 1913, ma, come ha affermato Quine in *The Ways of Paradox* (1966), è rinata nel peccato di confondere uso e menzione. Questo era però un peccato di poco conto, dato che si può certo fare logica modale senza confondere uso e menzione. Piú gravi erano altri due problemi: quello di dare un senso 1) alle modalità iterate e 2) alla quantificazione nei contesti modali. La loro mancata soluzione lasciò i sistemi modali sviluppati da Lewis allo stato di semplici curiosità fino alla fine degli anni '50. D'un colpo, con l'articolo di Kripke *A completeness theorem in modal logic* (1959), lo scenario sembrò cambiare. L'idea di Kripke era essenzialmente che, quando si considerano formule modali, il loro valore di verità in una data interpretazione può dipendere da quello che esse hanno in *altre* interpretazioni opportunamente «connesse» alla prima. Come ha osservato Dalla Chiara nella sua *Logica*, è merito di Kripke aver rotto la dicotomia tipica della semantica tarskiana in cui la relazione tra formule e stati di cose può assumere due forme soltanto: quella per cui una formula è vera in un *dato* stato di cose e quella per cui lo è in *ogni* stato di cose.

Cosí finalmente i sistemi di Lewis ebbero una semantica e dal 1960 al 1970 la California divenne la «terra promessa» dei «modalisti». Tra Los Angeles (UCLA) e San Francisco (Stanford) i migliori logici, da Montague a Scott, da Kaplan a Hintikka, da Davidson a Lemmon, produssero senza interruzione per dieci anni sempre nuovi sistemi modali con l'immancabile teorema di completezza. Finita la febbre, è stato proprio uno dei protagonisti di questa corsa, Scott, ad affermare (1973) che nessun logico modale sapeva veramente ciò di cui parlava! Questo non significava per Scott che tutto il lavoro fino ad allora svolto fosse cattivo o sbagliato, ma piuttosto che nessuno aveva prestato sufficiente attenzione alla «rilevanza» dei risultati. La questione che diventava cosí primaria era: che

cosa si sta modellizzando in logica modale? Forse, una risposta almeno parziale a questa domanda la dànno i recenti risultati di Boolos in cui possibilità e necessità «modellizzano» rispettivamente le nozioni di «consistenza con l'aritmetica di Peano» e «dimostrabilità nell'aritmetica di Peano». Sembra questa una via particolarmente interessante per ottenere una miglior comprensione del fenomeno dell'incompletezza in tutte le sue ramificazioni.

8. *Conclusione.*

Si è visto che la costruzione della ♦logica♦ del prim'ordine è essenzialmente basata sulla scelta di certi particolari concetti come concetti «logici». Ora, anche se è intuitivamente ovvio che essi lo sono, non s'è dato alcun *criterio generale* per riconoscerli come tali. Un tale criterio consentirebbe anche di rispondere alla domanda se, oltre a quelli costitutivi della logica del prim'ordine, vi siano altri concetti «logici» e dunque se l'ambito della logica sia esaurito o meno dalla logica del prim'ordine. Il modo migliore di affrontare la questione è quello di chiedersi che cosa succede se si estende la logica del prim'ordine. Già si è visto ad esempio che non appena, con la logica del second'ordine, si consente ai quantificatori di variare su sottoinsiemi arbitrari di U, si perde la completezza. D'altra parte, non appena si tenta, con la logica del second'ordine debole, di trattare come «logica» la nozione di insieme finito, si perde la compattezza. Lo stesso accade quando, con la ω-logica, si tenta d'incorporare nella logica la nozione di numero naturale. Sempre alla compattezza bisogna rinunziare se si estende la logica del prim'ordine aggiungendo il nuovo quantificatore «Esistono infinitamente tanti individui... tali che –».

Questa situazione potrebbe suggerire che le proprietà di completezza e di compattezza caratterizzano la logica del prim'ordine. Questo sarebbe davvero notevole, in quanto darebbe un buon argomento per restringere l'ambito della logica al prim'ordine e per trattare come concetti logici soltanto i connettivi enunciativi e i due usuali quantificatori (oltre, eventualmente, all'identità). Ma, nel 1970, Keisler, nel suo articolo *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*, ha dato un controesempio a questa congettura costruendo una logica che estende quella del prim'ordine mediante l'aggiunta del quantificatore «Esistono non-numerabilmente tanti individui... tali che –» e che ha entrambe queste proprietà, completezza e compattezza. Ora, anche i piú accesi logicisti esiterebbero a considerare come logica la nozione di non-numerabilità. D'altra parte, nel 1969 Lindström aveva dimostrato nel suo articolo *On extensions of elementary logic* che entro una classe di «logiche» estremamente estesa (che include quelle fin qui considerate) ogni logica che gode della proprietà di compattezza e della proprietà di Löwenheim-Skolem (per cui se una formula della logica ha un modello, allora ha un modello numerabilmente infinito o finito) è essenzialmente equivalente alla logica del prim'ordine: sono perciò le proprietà di compattezza e di Löwenheim-Skolem che caratterizzano la logica del prim'ordine. Ma questo risultato non dà ovviamente un argomento altrettanto buono per

restringere l'ambito della logica al prim'ordine. La ricerca in questa direzione è ancora attiva e ha dato luogo a una nuova branca della teoria dei modelli, nota come *teoria dei modelli astratta*.

Né fino ad oggi hanno dato migliori risultati i tentativi di delimitare l'ambito della logica partendo non dalla nozione semantica di conseguenza ma da quella sintattica di derivabilità e sfruttando i risultati di Gentzen. Tra questi, quello di Hacking in *What is logic?* (1979), benché interessante, difficilmente è in grado di superare le obiezioni di Sundholm (1981).

Forse, allora, il miglior argomento a favore della restrizione dell'ambito della logica al prim'ordine è la cosiddetta tesi di Hilbert, secondo cui 1) la logica del prim'ordine è *sufficiente* a esprimere la totalità della matematica classica e 2) la nozione di derivabilità al prim'ordine è *sufficiente* a rappresentare la nozione intuitiva di dimostrabilità della matematica classica. Come nota Barwise nel suo *Handbook* (1977), la prima parte della tesi di Hilbert è corroborata da prove empiriche. La seconda parte della tesi di Hilbert sembrerebbe seguire dalla prima parte e dal teorema di completezza. Per quanto riguarda 1), le «prove empiriche» fanno riferimento alla possibilità di ricostruire l'intera matematica classica entro la teoria degli insiemi, ad esempio nella versione al prim'ordine che ne hanno dato Zermelo e Fraenkel. Cosí, dal punto di vista della tesi di Hilbert, la teoria degl'insiemi rende esplicite tutte le assunzioni extra-logiche richieste nella costruzione della matematica classica. Questo non implica naturalmente alcun suggerimento ai matematici che operano nei campi piú diversi di derivare ogni loro teorema dalla teoria degl'insiemi *via* la logica del prim'ordine. Implica solo l'esistenza, se la tesi è vera, di una demarcazione «naturale» tra «logica» e «matematica». Questo, naturalmente, è al piú un argomento a favore della logica del prim'ordine contro i suoi concorrenti di tipo classico. Lascia però interamente aperta la questione della scelta tra di essa e i suoi concorrenti «non-classici», in primo luogo la logica intuizionista e quella quantistica.

Proprio quest'ultima solleva una questione che non è stata fin qui toccata, avendo ristretto la nostra attenzione alla logica in quanto strumento per comprendere e sviluppare la pratica *matematica* corrente. Può la logica svolgere questi ruoli anche rispetto alle teorie *fisiche*? Per molto tempo, il progresso in questa direzione è ristagnato per il permanere della tendenza dei neopositivisti ad applicare alle teorie fisiche concetti logici originariamente elaborati per le teorie matematiche senza modificazioni significative. Difficilmente si possono ottenere in tal modo risultati nuovi. Non appena però si modificano i concetti originari in modo da tener conto della specificità delle teorie fisiche, la situazione cambia completamente. Un buon esempio del genere è dato dal concetto di ◆equivalenza◆. Mentre nel suo senso stretto ha poco interesse in ambito fisico, molto di piú ne ha una sua variante, e cioè il concetto di equivalenza *conoscitiva*. Altri esempi in questa direzione senz'altro promettente si trovano nei lavori di Sneed e di Dalla Chiara e Toraldo di Francia. Può quindi darsi che in questo ambito ci si sia avviati sulla sicura strada del progresso. [M. M.].

Barendregt, H. P.
1981 *The λ-Calculus*, North-Holland, Amsterdam.

Barwise, J.
1977 (a cura di) *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Bell, J. L., e Machover, M.
1977 *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Beth, E. W.
1965 *The Foundations of Mathematics; a Study in the Philosophy of Science*, North-Holland, Amsterdam 1965².

Bocheński, J. M.
1956 *Formale Logik*, Alber, Freiburg-München (trad. it. Einaudi, Torino 1972).

Boolos, G. S.
1979 *The Unprovability of Consistency; an Essay in Modal Logic*, Cambridge University Press, London.

Boolos, G. S., e Jeffrey, R.
1980 *Computability and Logic*, Cambridge University Press, London 1980².

Brouwer, L. E. J.
[1905-55] *Collected Works*, I. *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam 1975.

Cagnoni, D.
1981 (a cura di) *Teoria della dimostrazione*, Feltrinelli, Milano.

Carnap, R.
1942 *Introduction to Semantics*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

Casari, E.
1973 (a cura di) *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze.

Cellucci, C.
1978 *Teoria della dimostrazione*, Boringhieri, Torino.

Chang, Ch. Ch., e Keisler, H. J.
1973 *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam (trad. it. Boringhieri, Torino 1980).

Dalen, D. van
1981 (a cura di) *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge University Press, London.

Dalla Chiara, M., e Toraldo di Francia, G.
1981 *Le teorie fisiche: un'analisi formale*, Boringhieri, Torino.

Dalla Chiara Scabia, M. L.
1973 *Logica*, Isedi, Milano.

Davis, M.
1965 (a cura di) *The Undecidable; Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett N.Y.

Dreben, B., e Goldfarb, W. D.
1979 *The Decision Problem*, Addison-Wesley, Reading Mass.

Dummett, M.
1977 *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, London.

Enderton, H. B.
1972 *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York.

Fenstad, J. E.
[1970] (a cura di) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam 1971.

Fraïssé, R.
1972-75 *Cours de logique mathématique*, 3 voll., Gauthier-Villars, Paris.

Gentzen, G.
1934 *Untersuchungen über das logische Schliessen*, in «Mathematische Zeitschrift», XXXIX, pp. 176-210, 405-31 (trad. it. parziale in Cagnoni 1981, pp. 77-116).

Goldblatt, R.
1979 *Topoi, the Categorial Analysis of Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Hacking, I.
1979 *What is logic?*, in «Journal of Philosophy», LXXVI, pp. 285-318.

Heijenoort, J. van
1967 (a cura di) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

Hintikka, J.
1973 *Logic, Language-Games and Information*, Oxford University Press, London (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1975).

Hughes, G. E., e Cresswell, M. J.
1968 *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1973).

Keisler, H. J.
1970 *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*, in «Annals of Mathematical Logic», I, pp. 1-93.

Kleene, S. C.
1952 *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Kneale, W. C., e Kneale, M.
1962 *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford (trad. it. Einaudi, Torino 1972).

Kreisel, G.
1965 *Mathematical Logic*, in Saaty 1963-65, vol. III, pp. 95-195.
1967 *Informal Rigour and Completeness Proofs*, in Lakatos 1967, pp. 138-86.
1968 *A survey of proof theory, I*, in «Journal of Symbolic Logic», XXXIII, pp. 321-88.
[1970] *A Survey of Proof Theory, II*, in Fenstad 1970, pp. 109-70.

Kreisel, G., e Krivine, J.-L.
1967 *Eléments de logique mathématique, théorie des modèles*, Dunod, Paris.

Kripke, S. A.
1959 *A completeness theorem in modal logic*, in «Journal of Symbolic Logic», XXIV, pp. 1-14.
1963*a* *Semantical analysis of modal logic*, I. *Normal modal propositional calculi*, in «Zeitschrift für mathematische Logik und die Grundlagen der Mathematik», IX, pp. 67-96.
[1963*b*] *Semantical Analysis of Modal Logic*, II. *Non-Normal Modal Propositional Calculi*, in J. W. Addison, L. Henkin e A. Tarski (a cura di), *The Theory of Models. Proceedings of the International Symposium of the Theory of Models, Berkeley Cal. 1963*, North-Holland, Amsterdam 1965, pp. 206-20.

Lakatos, I.
1967 (a cura di) *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Lindström, P.
1969 *On extensions of elementary logic*, in «Theoria», XXXV, pp. 1-11.

Mangione, C.
1971*a* *La svolta nella logica dell'Ottocento*, in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, V. *Dall'Ottocento al Novecento*, Garzanti, Milano, pp. 92-161.
1971*b* *Logica e problema dei fondamenti nella seconda metà dell'Ottocento, ibid.*, pp. 755-830.
1972 *La logica nel ventesimo secolo, ibid.*, VI. *Il Novecento*, pp. 469-682.
1976 *La logica nel ventesimo secolo (II), ibid.*, VII. *Il Novecento (2)*, pp. 303-433.

Manin, Ju. I.
1977 *A Course in Mathematical Logic*, Springer, New York.

Monk, J. D.
1976 *Mathematical Logic*, Springer, New York.

Mostowski, A.
1966 *Thirty Years of Foundational Studies*, Blackwell, Oxford.

Prawitz, D.
1971 *Ideas and Results in Proof Theory*, in Fenstad 1970, pp. 235-307 (trad. it. in Cagnoni 1981, pp. 127-204).

Putnam, H.
1971 *Philosophy of Logic*, Harper and Row, New York (trad. it. Isedi, Milano 1975).

Quine, W. van Orman
1966 *The Ways of Paradox and Other Essays*, Random House, New York (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1975).
1970 *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1981).

Robinson, A.
1963 *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, Amsterdam (trad. it. Boringhieri, Torino 1974).

Rogers, H. jr
1967 *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York.

Saaty, T. L.
1963-65 (a cura di) *Lectures on Modern Mathematics*, 3 voll., Wiley, New York.

Scott, D.
1973 *Background to Formalization*, in H. Leblanc (a cura di), *Truth, Syntax and Modality*, North-Holland, Amsterdam, pp. 244-73.

Shoenfield, J. R.
1967 *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading Mass. (trad. it. Boringhieri, Torino 1980).

Sneed, J. D.
1970 *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht.

Sundholm, G.
1981 *Hacking's logic*, in «Journal of Philosophy», LXXVIII, pp. 160-67.

Tarski, A.
1956 *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford (trad. it. parziale in F. Rivetti Barbò, *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo. Da Peirce a Tarski*, Vita e Pensiero, Milano 1961).

Tennant, N.
1978 *Natural Logic*, Edinburgh University Press, Edinburgh.

Wang, H.
1974 *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Deduzione/prova

Il concetto di prova o dimostrazione ricorre oggi in molte scienze, ma quasi esclusivamente con il significato di dimostrazione matematica. Se per esempio un fisico, oppure un economista o un linguista, parla di una «dimostrazione», egli intende quasi invariabilmente di aver dimostrato matematicamente che certe ipotesi implicano determinati risultati, non che ha «dimostrato» le ipotesi fisiche, economiche o linguistiche in quanto tali. Questa accezione si spiega, naturalmente, tenendo presente l'unico notevole risultato indiscusso dell'empirismo, cioè la constatazione, peraltro convincente, che le leggi di natura siano contingenti e non necessarie. Dal momento che normalmente i non-matematici immaginano che la matematica sia una disciplina non-problematica, cioè piú un corpus di metodologie ben definite che una disciplina indipendente, un linguaggio della scienza piuttosto che una scienza, sembrerebbe a prima vista che «dimostrazione» sia un concetto invariante e che, verosimilmente, non possa intervenire in modo fecondo in una futura discussione metadisciplinare.

Se questa è la situazione della nozione di dimostrazione, il concetto di deduzione sembra avere ancor meno interesse. Anzi, mentre molti scienziati usano la parola 'dimostrazione', la parola 'deduzione', nella sua accezione logica opposta a quella dei romanzi gialli, ricorre raramente al di fuori dei lavori degli studiosi di logica.

In verità la dimostrazione viene definita normalmente dai logici in base alla nozione di deduzione (benché la terminologia sia molto varia, alcuni logici usano addirittura 'dimostrazione' con il significato di 'deduzione'): una dimostrazione in senso matematico è semplicemente una deduzione derivata da assiomi matematici accettati (inclusi gli assiomi della geometria e della topologia e principî della teoria degli insiemi quali l'assioma della scelta).

Esiste anche un uso simile in logica matematica, nella quale ogni deduzione corretta (corretta rispetto alle regole del sistema formale) in un sistema formale non-interpretato – dove tutte le premesse sono formule iniziali o assiomi del sistema formale non-interpretato in questione – è considerata una dimostrazione nel sistema formale stesso; e vi è ancora un'altra nozione simile di dimostrazione in una teoria assiomatica (per esempio, una dimostrazione in un sistema assiomatizzato della meccanica); ma questi usi non verranno qui presi in esame.

Quello di deduzione è un concetto che appare nel corso della ricerca sulla struttura del pensiero e in particolare sulla struttura del pensiero in matematica e nelle scienze esatte. È un concetto centrale (ed anche affascinante) per i logici, ma sembra rivestire scarso interesse per chiunque altro.

Personalmente ritengo che l'aspetto di non-problematicità sia sviante per entrambi i concetti. Dimostrazione sembra essere un concetto non-problematico perché tale appare la matematica; ma la matematica non dovrebbe apparire non problematica!

L'articolo «Logica» offre numerosi elementi per ritenere che il realismo si stia riaffermando come posizione rigorosa nella filosofia della matematica. Per esempio si citano le opere di filosofi e logici cosí diversi come Quine, Gödel, Kreisel, Wang, Parsons, Putnam. Tuttavia il realismo nella filosofia della matematica è stato tradizionalmente associato a generi di filosofia metafisica che oggi non sono accettabili. Una delle cose piú interessanti circa l'odierno revival del realismo è che alcuni, ma non tutti, tra i nuovi realisti tentano di dimostrare che si può essere realisti in matematica senza essere «metafisici» nel senso peggiorativo del termine. In parte, questi sforzi sono rappresentati da nuove impostazioni del concetto di dimostrazione matematica che mettono in risalto l'analogia tra matematica e scienza empirica. Se questi tentativi riusciranno a creare una nuova corrente intellettuale vitale (e ci vorranno forse molti decenni per dirlo, la filosofia non è infatti un campo molto rapido), l'impatto con tutto ciò che pensiamo circa la scienza e la conoscenza umana potrà essere senza dubbio grande. Ciò può implicare nientemeno che il crollo del positivismo/nominalismo/empirismo come filosofie ufficiali della scienza (ufficiali nel senso che sono ufficialmente approvate dalla maggior parte degli scienziati) e il sorgere di un nuovo movimento realista che riapra l'intera questione della struttura della conoscenza umana. (Vi sono analogie evidenti tra riproporre la questione relativa alla struttura della conoscenza nella scienza e il lavoro di psicologi e linguisti strutturalisti come Piaget e Chomsky; ma una trattazione di queste analogie porterebbe fuori dai limiti del presente articolo).

La discussione circa la nozione di dimostrazione porrà in evidenza questa possibilità e presterà relativamente meno attenzione alle tradizionali filosofie della matematica – logicismo, intuizionismo, formalismo – che hanno cessato di avere grande peso sia nel lavoro matematico sia nella filosofia contemporanea.

La nozione di deduzione suscita grande interesse, anche per le molte interrelazioni con altri campi. Vi sono, come si vedrà, stretti legami tra deduzione e ricorsività e tra deduzione e formalizzazione. Infine la possibilità che le leggi della logica possano non essere verità necessarie, che per lo meno alcune leggi della logica siano passibili di revisione per ragioni empiriche, come alcune leggi della geometria classica vennero riviste per ragioni empiriche, solleva problemi seri ed interessanti per l'intera nozione di deduzione.

Poiché la dimostrazione è definita in termini di deduzione, s'inizierà a trattarle, in questo articolo, da quest'ultima nozione.

1. *Deduzione.*

La logica ha attualmente (almeno) due aspetti: la logica è la teoria degli oggetti logici – insiemi – e, in misura minore, degli oggetti intensionali, come proprietà, proposizioni, mondi possibili, ecc.; ma per tradizione la logica è anche la teoria della deduzione. Ma cosa è la deduzione?

Credo che il miglior modo per vedere che la nozione di deduzione non è

cosí non-problematica, come invece appare, sia quello di esaminare alcuni argomenti pro o contro una particolare tesi relativa alla nozione di deduzione. Seguendo un suggerimento di Martin Davis, la tesi in discussione verrà chiamata *tesi di Hilbert*, malgrado Hilbert non l'abbia mai enunciata esplicitamente. Eccola.

TESI DI HILBERT. *La nozione matematica informale di deduzione, cioè la nozione implicita quando si afferma di dedurre un teorema dagli assiomi di una qualche branca della matematica, è correttamente formalizzata dalla logica del primo ordine.*

Sono necessarie alcune spiegazioni. Logica del primo ordine (il termine fu introdotto nel secolo scorso da Charles Sanders Peirce e venne usato da Löwenheim, il quale adottò la notazione di Peirce, nel saggio in cui dimostra il famoso teorema che porta il suo nome) è la teoria che deriva dall'algebra delle relazioni (essa stessa, storicamente, è una generalizzazione dell'algebra delle classi di Boole) con l'aggiunta dei quantificatori, cioè, delle espressioni «per ogni x» e «esiste un x». Peirce chiamò questa teoria «primo ordine» poiché in essa non compaiono quantificatori sulle relazioni, ma solo quantificatori sugli individui. Cosí l'espressione 'Se ogni cosa è F, allora qualcosa è F' (nei simboli solitamente usati, $(x)Fx \supset (Ex)Fx$) è un principio appartenente alla logica del primo ordine; invece l'espressione 'Esiste un F tale che qualcosa è F oppure ogni cosa è F' (in simboli, $(EF)((Ex)Fx \vee (x)Fx)$) non appartiene al primo ordine perché «esiste un F» è un quantificatore applicato a relazioni (propriamente parlando, un quantificatore su classi, ma le classi contano come relazioni), e non a individui. Tutti i sillogismi di Aristotele appartengono all'ambito della logica del primo ordine (per esempio, il famoso Barbara: il sillogismo 'Tutti gli S sono M, tutti gli M sono P, perciò tutti gli S sono P' può essere espresso nella forma 'Se per ogni x, Sx implica Mx, e per ogni x, Mx implica Px, allora, per ogni x, Sx implica Px', o, nella solita simbologia, $(x)(Sx \supset Mx) \cdot (x)(Mx \supset Px) \supset (x)(Sx \supset Px))$ e tutti i principî dell'algebra delle relazioni del secolo XIX possono essere analogamente espressi nell'ambito della logica del primo ordine (per esempio, la famosa inferenza di De Morgan 'Se tutti i cavalli sono animali, allora tutte le teste dei cavalli sono teste di animali', che non trova giustificazione entro l'intero corpus della logica tradizionale di Aristotele, può essere espressa con lo schema 'Se, per ogni x, Hx implica Ax, allora, per ogni x, se esiste un y tale che $x\mathrm{C}y$ e Hy, allora esiste un y tale che $x\mathrm{C}y$ e Ay', o, nei soliti simboli, $(x)(Hx \supset Ax) \supset (x)((Ey)(x\mathrm{C}y \cdot Hy) \supset (Ey)(x\mathrm{C}y \cdot Ay))$.

Dire che la nozione di deduzione è formalizzata correttamente dalla logica di primo ordine è come dire che ogni dimostrazione in matematica informale può essere scritta, dopo un'appropriata ricostruzione razionale, con le notazioni della logica del primo ordine e che, inoltre, ciò può essere fatto in modo tale che ogni *passaggio* nella deduzione riscritta possa essere giustificato con una delle regole della logica del primo ordine (non si definiranno qui queste regole, ma esse sono in realtà poche e semplici e di applicazione cosí meccani-

ca da potersi facilmente programmare su un computer. In effetti, i computer vengono oggi usati per verificare meccanicamente le dimostrazioni, riscrivendole essenzialmente in questa formalizzazione).

La tesi di Hilbert dice sostanzialmente che in un certo senso la logica *è* logica del primo ordine. La logica del secondo ordine (che ammette quantificatori su classi e relazioni), quella del terzo ordine (che ammette quantificatori su classi di classi), del quarto ordine, ecc. non sono propriamente *logica*, ma parti della teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi e l'aritmetica non sono logica, ma sono le teorie assiomatiche di speciali oggetti (numeri e insiemi). Il compito tradizionale della logica – inquadrare la nozione di deduzione – è completamente adempiuto dalla parte piú elementare dell'argomento, la logica del primo ordine. Tutto il resto di ciò che oggi viene chiamato logica è propriamente *matematica*.

Ma in che modo si può sapere se la nozione di deduzione è stata *completamente* inquadrata? Come possiamo essere sicuri che niente è stato trascurato e che non è stato incluso qualcosa di superfluo?

La risposta solita è che la dimostrazione di validità (la dimostrazione che tutti i principî della logica del primo ordine sono validi e che le regole mantengono validità, in modo che tutti i teoremi del primo ordine risultino validi) mostra che non è stato incluso niente di superfluo. Perciò la logica del primo ordine inquadra la nozione di deduzione (cioè la nozione di principio valido di deduzione) «al suo interno»; la dimostrazione di validità mostra che ogni elenco di tutti i principî validi di deduzione deve *includere* almeno l'intera logica del primo ordine. Ma, nel 1930, Kurt Gödel riuscí (attraverso difficili argomentazioni metamatematiche) a mostrare che la logica del primo ordine è *completa*: Gödel dimostrò che se un principio esprimibile con le notazioni del primo ordine non è un teorema del sistema, allora un certo esempio, ottenuto per sostituzione di quel principio nella notazione della teoria dei numeri, risulta *falso* e perciò il principio non può essere incluso nella nostra teoria della deduzione perché esso non è *valido*. In questo modo la dimostrazione di completezza mostra che *nessun* elenco di principî validi di deduzione (espressi nelle notazioni del primo ordine) può includere *piú* che la logica del primo ordine. Cosí, procedendo con l'aiuto della dimostrazione di validità e con quella di completezza, si è nella felice posizione di poter *provare* che è stata inquadrata *esattamente* la nozione di principio valido di deduzione.

L'argomento appena fornito è stato anche usato per dimostrare che non si potrebbero cambiare in modo ragionevole i principî logici ammessi. Questo non è un problema semplicemente filosofico, nel senso di non-pratico. Sebbene l'opinione di Mill, sull'essere i principî della geometria contingenti, possa essere sembrata allo stesso tempo poco plausibile e d'interesse meramente speculativo quando venne formulata, lo sviluppo della geometria non-euclidea e della teoria della relatività ha costretto ad ammettere che Mill aveva ragione, e che il carattere empirico della geometria è di fondamentale importanza per la fisica. Oggi molti fisici e filosofi sono dell'opinione che almeno alcuni principî della logica sono contingenti, e che l'interpretazione corretta della meccanica quantistica è la cosiddetta interpretazione logica, l'interpretazione secondo la quale la struttura possibile del mondo non è correttamente descritta dalla logica classica, e che la matematica della meccanica quantistica è in realtà una descrizione di una struttura possibile non-classica. Benché questa interpretazione fosse parsa avventata quando venne proposta inizialmente, e anche oggi susciti piú interesse di quanto non convinca, resta il fatto che la discussione sull'interpretazione logica domina sempre piú le discussioni relative ai fondamenti della meccanica quantistica, le vengono dedicati sempre piú libri, ecc.

Tuttavia come Quine sottolineò tempo fa (in *Two Dogmas of Empiricism* [1951]) il fatto realmente importante è che la revisione delle leggi della logica classica è ancora proponibile. Anche se il risultato fosse di *non* riesaminare la nostra logica, il solo fatto che gli scienziati possano discutere una tale eventualità mostra che la logica non è immune da revisioni. E se la logica non è immune da revisioni, quali argomenti e che significato restano nel mantenere una nozione di assoluta e non rivedibile verità necessaria?

Se, tuttavia, si potesse dimostrare che una revisione della nostra logica è esclusa a priori, allora quest'argomentazione sarebbe sconfitta; poiché allora gli scienziati ed i filosofi che discussero l'interpretazione logica della meccanica quantistica commisero proprio un errore grossolano. Ora, l'argomento che tale revisione *è* esclusa a priori si configura come segue: ogni esperimento relativo a una teoria fisica esige la presenza di conseguenze deducibili da quella teoria. Se non esiste una teoria definita della deduzione, il parlare di sperimentazione empirica diviene privo di significato. La dimostrazione fornita (che la tesi di Hilbert è corretta «all'interno», con il teorema di validità, e «all'esterno», col teorema di completezza di Gödel) mostra che la corretta teoria della deduzione è la logica del primo ordine. C. V. D.

Tuttavia questo argomento è circolare. La ragione di ciò sta nel fatto che la dimostrazione di validità assume gli stessi principî della logica che dimostra valida. La cosiddetta dimostrazione di validità è, anzi, poco piú che un esercizio formale: filosoficamente, non aggiunge supporto alcuno ai principî della logica del primo ordine. Se si cambia la nostra logica sostituendola con quella della «logica quantistica» (una logica basata su un calcolo proposizionale in cui non esistono leggi distributive. Viene a volte chiamata logica modulare per la stretta analogia con la teoria dei reticoli modulati), allora va fornita una diversa dimostrazione di validità; una dimostrazione che utilizzi la logica quantistica nel metalinguaggio, proprio come la dimostrazione classica di validità usa la logica classica nel metalinguaggio. In piú, il problema di completezza dev'essere reimpostato. (In effetti, Ian Hacking ha appena scoperto una dimostrazione di completezza per la logica modulare nell'ambito di un'interpretazione meccanico-quantistica). Apparirà cioè una nuova tesi di Hilbert, la tesi per cui la logica del primo ordine *modulare* è la teoria corretta della deduzione.

La restante parte delle argomentazioni precedenti – che una qualche logica deve essere fissa altrimenti la nozione di sperimentazione empirica si sgre-

tola – mostra solo che qualche logica deve essere fissa in ogni contesto. Ma buona parte della logica è fissa – nel senso che non viene chiamata in causa – nel dibattito tra difensori della logica modulare e difensori della logica classica nella meccanica quantistica. Il fatto che, in ogni contesto, ammesso che si voglia impostare una discussione che abbia significato, alcuni principî debbono essere fissati, non dimostra certo che gli *stessi* principî debbano essere fissati in *tutti* i contesti. (Inoltre, anche se dovesse risultare che alcuni principî logici sono richiesti a priori nella discussione, non è detto che questi siano necessariamente *tutti* i principî della logica classica). Un numero sempre crescente di filosofi riconosce che il cosiddetto metodo scientifico varia con il tempo e non è un'entità fissata astoricamente; se si dovesse riconoscere che anche la stessa teoria della deduzione cambia, poco male!

Anche se si accetta la logica classica, l'argomentazione considerata in favore della tesi di Hilbert mostra solo che i teoremi della logica del primo ordine sono esattamente i principî formalmente validi del ragionamento che possono essere espressi nei termini della simbologia relativa alla stessa logica del primo ordine: *non esistono altri principî formalmente validi di ragionamento che possano essere espressi nei termini di quei simboli.* Ma perché non si dovrebbe poter arricchire il linguaggio della logica del primo ordine? Se si aggiungessero delle ulteriori costanti logiche – per esempio, dei quantificatori tipo 'Esistono infiniti x tali che', oppure nozioni modali come 'È possibile che' e 'È necessario che' – allora, naturalmente, diverrebbe possibile stabilire ulteriori principî di ragionamento «formalmente validi».

2. *Dimostrazione e natura degli assiomi.*

Credo che la natura della dimostrazione matematica sia un problema filosofico che vada purtroppo riaperto e riesaminato. Si è definita una dimostrazione come una deduzione dagli assiomi matematici accettati. Strettamente parlando, questa è piú una ricostruzione razionale del concetto, che una descrizione dell'accezione attuale, vista attraverso la storia dell'argomento. Perciò, mentre è divenuto di uso comune nel secolo XX rendere espliciti tutti i postulati della matematica moderna attraverso ricostruzioni assiomatiche (cosicché le dimostrazioni fornite da un matematico contemporaneo potrebbero essere facilmente riformulate come deduzioni derivate dagli assiomi matematici accettati), nel corso di quasi tutta la storia della matematica gli assunti erano impliciti nelle notazioni e nelle pratiche di calcolo, che non erano sempre definite esplicitamente in forma di assiomi o postulati. Perciò si può realmente dire che una dimostrazione matematica è una deduzione da assiomi o assunti matematici accettati, dove questi ultimi possono essere impliciti piuttosto che espliciti. Ma da dove derivano questi assiomi e assunti matematici accettati?

(Esiste un altro aspetto del problema relativo alla natura della dimostrazione: la natura della deduzione. Come si è visto, questa si riporta al problema

della natura della logica. Partire dal problema delle origini degli «assiomi e assunti matematici accettati» è partire da un diverso gruppo di questioni, ma, ovviamente, i due gruppi sono intimamente connessi).

Partirò da quello che sembra essere a prima vista un caso del tutto speciale: l'assioma di sostituzione nella teoria degli insiemi.

La moderna teoria degli insiemi nasce con il lavoro di Zermelo. Gli assiomi di Zermelo descrivono un universo di insiemi che giacciono in quelli che ora si chiamano «ranghi». Esiste un unico insieme di rango zero – l'insieme vuoto (nella matematica pura; nella matematica applicata, insiemi di oggetti individuali, per esempio oggetti fisici, possono essere considerati di rango zero). Tutti i sottoinsiemi di un dato rango – tutti gli insiemi i cui elementi giacciono nel rango dato – appartengono al rango successivo. In questo modo, il rango uno contiene l'insieme vuoto e l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto (si osservi che l'insieme vuoto appartiene a ogni rango, dal momento che è un sottoinsieme – il sottoinsieme vuoto – di ogni rango); il rango due contiene l'insieme vuoto, l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto, l'insieme il cui unico elemento è l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto, e l'insieme costituito dall'insieme vuoto e dall'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto; ecc. È facile vedere che un insieme di un qualunque rango appartiene a ogni rango *superiore*. Questa struttura ricorda palesemente la teoria dei tipi di Russell: infatti, i ranghi sono proprio ciò che diventano i tipi di Russell se si attribuisce loro la proprietà di essere cumulativi, cioè se ogni insieme di un dato tipo può appartenere a ogni tipo superiore. Tuttavia, Russell non estese la sua gerarchia dei tipi nel transfinito (ed è per questo che egli doveva postulare l'esistenza di infiniti individui). Zermelo estese il suo sistema di ranghi oltre i ranghi finiti (cioè, esiste un rango ω, un rango $\omega+1$, un rango $\omega+2$,...), essendo il rango ω l'unione di tutti i ranghi finiti. Cosí Zermelo ottenne degli insiemi infiniti (per esempio l'insieme costituito dall'insieme vuoto, dal *singleton* dell'insieme vuoto, dal *singleton* del *singleton* dell'insieme vuoto..., dove il *singleton* di x rappresenta l'insieme il cui unico elemento è x). Ma Zermelo non ottenne insiemi infiniti «abbastanza grandi» – insiemi di cardinalità infinita sufficientemente alta – da sviluppare gran parte della teoria dei cardinali transfiniti di Cantor. Perciò si rese necessario un qualche assioma forte dell'infinito, un assioma che garantisse l'esistenza di insiemi molto grandi.

Von Neumann (che contribuí anche alla descrizione della teoria degli insiemi di Zermelo in termini di ranghi) propose come soluzione di questo problema l'assioma di sostituzione. Mentre l'enunciazione esatta dell'assioma è tecnica, l'idea che ne sta alla base è abbastanza facile da spiegare: ciò che l'assioma cerca di esprimere è il concetto che ogni collezione di insiemi che abbia la stessa cardinalità di un insieme, e cioè ogni collezione di insiemi che possa essere messa in corrispondenza biunivoca con un insieme, è essa stessa un insieme. (Per esempio, ogni collezione numerabile di insiemi è automaticamente un insieme). Ciò ha per effetto di spingere la successione dei ranghi ad estendersi molto «lontano» nel transfinito.

Pochi matematici vollero riconoscere l'assioma di sostituzione come «in-

trinsecamente evidente». Forse incomincia a sembrare «intrinsecamente evidente» solo ora che si è tanto abituati ad usarlo! Alcuni teorici degli insiemi mentono sostenendo la possibilità di generare l'universo degli insiemi attraverso un processo di formazione d'insiemi di rango sempre piú grande, come se l'intero universo classico degli insiemi potesse essere costruito da una mente umana che operasse con i tempi e i ritmi psichici. Ma questa è solo un'immagine – e neanche quest'immagine mostra in realtà che l'assioma è vero, nemmeno se la si considera alla lettera. Dunque, che cosa succede?

In *What is Mathematical Truth* [1975] Putnam argomenta che si dovrebbe essere «realisti» riguardo alle affermazioni della matematica superiore nel senso che si dovrebbe accettare la proposizione per cui ogni affermazione nel linguaggio di una matematica convenientemente formalizzata ha un valore di verità (sia che si possa dimostrare o confutare l'affermazione, sia che essa sia indecidibile). Questo è realismo nel senso di oggettivismo, assumendo l'atteggiamento secondo il quale i fatti matematici sono fatti oggettivi, indipendentemente da ciò che è dimostrabile dagli esseri umani; oppure nel senso di accettare la bivalenza (che la legge del terzo escluso vale, nella significativa forma che ogni affermazione del linguaggio in questione ha uno dei due valori di verità, vero o falso, sia che lo si possa scoprire o no). È da notare che questa forma di realismo non impegna necessariamente nei riguardi dell'esistenza degli «oggetti matematici». (Argomenti piú dettagliati circa il realismo sono contenuti nella *Philosophy of Logic* di Putnam [1971], e in vari scritti di Quine [1936; 1951; 1963] e Gödel [1944; 1947], ma questi ultimi non fanno distinzione tra l'oggettivismo e il postulare l'esistenza di oggetti matematici).

Se questa posizione realista è corretta, allora è possibile rispondere facilmente alla domanda riguardante lo status in cui è possibile fissare l'assioma di sostituzione; bisognerebbe evitare di dire «Bene, fa proprio parte del formalismo. Non vi è qui problema di evidenza intrinseca perché non vi è problema di verità».

Si è già sottolineato che pochi matematici sosterrebbero che l'assioma di sostituzione è intrinsecamente evidente, tuttavia esso possiede un grado di evidenza. È plausibile; è naturale; appare evidente ad alcune persone. Vari sono gli argomenti contro l'evidenza intrinseca intesa come status assoluto degli assiomi matematici; ma indipendentemente da tali argomentazioni, l'evidenza intrinseca non può ovviamente essere applicata in questo caso. Se l'assioma di sostituzione fosse (mettiamo il caso) una verità, ma non una verità intrinsecamente evidente, su cosa si potrebbe basare l'accettazione della sua verità?

Occorre far attenzione a questo passo. Mi richiamo a un corpo crescente di opinioni filosofiche che rifiutano l'antioggettivismo (o antirealismo) legato al nominalismo ufficiale o *make-believe-ism* di quasi tutti i matematici, sebbene rifiuti anche i richiami all'evidenza intrinseca e alla verità necessaria associati al platonismo tradizionale. Se questo crescente insieme di opinioni filosofiche è sulla strada giusta, allora esiste un reale problema epistemologico sulla natura della conoscenza matematica che formalisti, intuizionisti e platonisti hanno sempre supersemplificato, anche se in modi diversi.

Credo che questo sia proprio il caso in questione. Certamente l'intuizione svolge un ruolo nella nostra accettazione dell'assioma di sostituzione, ma un ruolo enorme – di fatto decisivo – è svolto dal successo pratico dell'assioma. Ciò che le filosofie della matematica tradizionali non sono in grado di ammettere è l'importanza epistemologica della pratica matematica. L'assioma di sostituzione ha avuto successo nel senso che ha condotto a uno sviluppo poderoso ed attraente della teoria degli insiemi. E questo, e nient'altro, ha reso certa e consolidata la sua posizione come assioma. In breve, in questo c'è qualcosa di quasi-empirico, qualcosa di analogo alla conferma d'una teoria scientifica nelle scienze naturali.

Si sarebbe potuto usare un altro esempio per lo stesso processo, il processo di conferma quasi-empirica di un assioma matematico: è l'esempio relativo all'assioma della scelta.

Difendendo l'assioma contro la critica di Peano (si veda a questo proposito Zermelo [1908]), Zermelo afferma che l'assioma è «intuitivamente evidente e necessario alla scienza». Riportando numerosi esempi relativi all'uso dell'assioma nella teoria degli insiemi «benché esso non fosse mai stato formulato nei manuali», Zermelo argomenta come «un uso cosí estensivo di un principio possa essere spiegato solo dalla sua evidenza intrinseca, che, ovviamente, non va confusa con la sua dimostrabilità. Non ha importanza se questa evidenza intrinseca è in certo grado soggettiva – essa è senza dubbio fonte necessaria di principî matematici, anche se non è uno strumento delle dimostrazioni matematiche, e l'asserzione di Peano che esso non ha niente e che fare con la matematica ignora fatti palesi. Ma la questione che può essere oggettivamente decisa, se il principio sia *necessario nella scienza*, preferirei a questo punto metterla in discussione citando numerosi teoremi e problemi elementari e fondamentali che, secondo me, non potrebbero affatto essere trattati senza il principio della scelta». (Qui Zermelo fornisce un elenco di teoremi per i quali è necessario l'assioma della scelta).

Mentre l'espressione 'evidenza intrinseca' sembra oggi troppo forte, Zermelo ha sicuramente ragione nel ritenere che l'intuizione conti qualcosa. Dopo tutto, nessuno propone di aggiungere l'ipotesi di Riemann riguardante gli zeri della funzione zeta come un nuovo assioma della teoria dei numeri, anche se essa possiede una gran quantità di conseguenze molto interessanti. Ma è singolare che ciò che Zermelo caratterizzava come «oggettivo» non era l'evidenza intrinseca dell'assioma, ma la sua necessità per la scienza. Oggi non solo l'assioma della scelta, ma l'intero edificio della moderna teoria degli insiemi viene convalidato in base al grande successo che ottiene nelle applicazioni matematiche, in altre parole, sulla base della «necessità per la scienza».

Se questo è vero, sorge immediatamente la questione seguente: questo uso di metodi quasi-empirici nella matematica è un fenomeno *nuovo*, un fenomeno apparso solo con lo sviluppo della teoria cantoriana degli insiemi, oppure esso si è sempre verificato? Esistono nella storia della matematica esempi relativi a questo medesimo processo, che siano precedenti e convincenti?

3. *La geometria analitica di Descartes.*

Un esempio di questo tipo, mi pare, è rappresentato dalla geometria analitica di Descartes. Come per la matematica araba che la precedette, essa non venne presentata in forma esplicitamente assiomatica; piuttosto, gli assunti sono impliciti nelle notazioni e nelle pratiche di calcolo. Si ha però l'impressione che Descartes usasse la variabile x estendendola a quelli che oggi si definirebbero numeri algebrici, cioè numeri che sono gli zeri di equazioni algebriche a coefficienti razionali, e forse anche ad altri reali – a quel tempo i logaritmi erano già stati sviluppati –, benché il concetto di numero reale, nella sua piú ampia accezione, non venga sviluppato completamente fino al secolo XIX. L'assunto implicito dal quale dipende la geometria analitica di Descartes è (per darne una definizione la piú generale possibile) che ogni numero algebrico reale corrisponde ad un segmento sulla retta. (Nel secolo XIX questo verrà sviluppato nell'assunto della corrispondenza biunivoca che conserva la distanza tra i numeri reali e i punti della retta). Orbene, questo assunto non può essere provato all'interno della geometria euclidea. Per alcuni numeri algebrici reali, ad esempio la radice quadrata di 2, si può dimostrare attraverso una costruzione geometrica che esiste sulla retta un tale segmento, ma per la maggior parte dei numeri algebrici reali (per non parlare dei logaritmi!) tale costruzione non esiste. Se si assume il principio degli intervalli incapsulati (per ogni successione d'intervalli chiusi incapsulati esiste almeno un punto che appartiene a tutti gli intervalli della successione), o altri simili, si può di fatto dimostrare che ogni numero *reale* (non solamente ogni numero algebrico reale) corrisponde a un segmento sulla retta, ma tale principio non è evidente a meno che non si creda *già* a una corrispondenza tra numeri reali e punti sulla retta!

Personalmente credo che qui l'intuizione abbia certamente svolto un certo ruolo; ma ancora una volta, un ruolo enorme – un ruolo decisivo – fu svolto dal successo della geometria analitica nella pratica. L'assunto che ogni numero algebrico reale corrisponde a un segmento «ebbe successo» nel senso che condusse a una tecnica attraente e potente, atta a trattare problemi geometrici con metodi algebrici, una tecnica che risultò fondamentale per lo sviluppo del calcolo e dell'intero apparato della fisica matematica. Questo e non altro ha reso certa e consolidata la posizione della corrispondenza tra numeri reali (inizialmente, reali algebrici) e segmenti. Essa diventò «evidente» perché diventò fondamentale per la pratica matematica.

L'assunto di Descartes, o piuttosto l'assunto cosí come venne sviluppato dai lavori dei matematici del secolo XIX che culminarono con quello di Weierstrass, può essere enunciato nel modo seguente:

PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA. *Esiste una corrispondenza biunivoca che conserva l'ordine e la distanza tra i punti della retta e i numeri reali.*

Si può cercare una giustificazione di questo enunciato nello stesso modo in cui spesso viene giustificata la tesi di Church: rivendicando il fatto che

«linea retta» è una nozione «confusa» e che questa è una «spiegazione» che «elimina l'ambiguità»; ma tutto ciò appare molto poco plausibile. Per contro, il principio di corrispondenza è un assunto sostantivo che pone in relazione gli oggetti dell'intuizione geometrica con gli oggetti dell'intuizione aritmetica. E, se abbiamo ragione, esso possiede lo stesso status dell'assioma della scelta: è accettato in parte sulla base dell'intuizione, ma soprattutto perché, per usare le parole di Zermelo, «il principio è necessario per la scienza». Se abbiamo ragione, la matematica si è estesa – ha aggiunto ciò che equivaleva agli *assiomi addizionali*, anche se essi non erano «formulati nei manuali» – attraverso processi quasi-empirici molto prima che venisse sviluppata la teoria cantoriana degl'insiemi. E questo processo non venne discusso né dai matematici né dai filosofi poiché entrambe le comunità gravitavano nella stretta dell'immagine filosofica tradizionale della matematica, intesa come una disciplina a priori fondata su verità «eterne».

4. *Prima e dopo Descartes.*

Anche se serve a poco moltiplicare semplicemente gli esempi, non è difficile trovare ulteriori casi nei quali gli assunti della matematica, impliciti o espliciti, vennero estesi soprattutto sulla base del successo teorico o tecnico, cioè per il fatto che alcune nozioni (che possedevano, certamente, un grado di «evidenza» o plausibilità intuitiva) si dimostratono il fondamento di teorie e tecniche matematiche potenti. Gli stessi numeri reali algebrici non furono postulati esplicitamente, ma s'insinuarono nel pensiero matematico pressoché inconsciamente. Mentre un Greco antico avrebbe detto semplicemente che l'equazione $x^2=2$ «non ammette soluzioni», gli Arabi avrebbero scritto

(1) $x=1{,}414\ldots$ (in notazione moderna).

Ma la (1) è ambigua: può significare: *a*) l'equazione $x^2=2$ non ammette soluzione, però $x=1{,}414$ è una soluzione *approssimata* (in numeri razionali) e l'approssimazione potrebbe essere migliorata calcolando un maggior numero di decimali; *b*) il numero algebrico $x=1{,}414\ldots$ *è* la soluzione di $x^2=2$.

Con ogni probabilità la (1), in origine, aveva un significato simile ad *a*) (cosa che non presuppone l'esistenza dei numeri irrazionali), e nel corso del tempo espressioni come «1,414...», ecc., divennero cosí familiari che sembrarono essere «numeri» buoni tanto quanto 0, 1, 2, 3, ... In questo modo l'ontologia della matematica portò a includere numeri irrazionali (i reali algebrici) come il risultato di una tecnica di calcolo per approssimare soluzioni di equazioni e delle caratteristiche della notazione decimale stessa. In modo analogo, piú recentemente, la teoria cantoriana degli insiemi non si presentò come un'invenzione di un singolo fondata su nient'altro che l'uso prematematico di parole quali *Menge* (il vocabolo tedesco per 'aggregato'). La nozione di funzione arbitraria (strettamente connessa alla nozione di insieme arbitrario di numeri reali) si fece lentamente strada nel corso dei duecento anni precedenti a Cantor.

Insiemi arbitrari di reali (essi stessi pensati come determinati insiemi di razionali) erano già familiari ai tempi in cui Cantor lavorava. E Boole aveva già esplicitamente riconosciuto gli insiemi (o «classi», come li chiamò) come oggetti matematici, nella sua algebra della logica. Senza dubbio, Cantor giunse molto piú avanti dei suoi predecessori; ma senza i suoi predecessori, anche la nozione di «insieme di insiemi» avrebbe potuto sembrare bizzarra, come sembra bizzarra oggi alla maggior parte dei profani. (Quine ha messo in evidenza nel suo libro *Set Theory and its Logic* [1963] che il semplice uso dell'espressione «insieme di», in sé e per sé, non porta necessariamente a riconoscere gli insiemi come oggetti, per non parlare poi della formazione di insiemi di insiemi). Anche nel caso in cui gli assiomi matematici paiano del tutto intrinsecamente evidenti – come oggi è per gli assiomi di comprensione della teoria dei numeri del secondo ordine (questi semplicemente affermano l'esistenza di vari insiemi di numeri interi matematicamente definibili) – questa evidenza intrinseca è spesso evidenza intrinseca nell'ambito di una teoria che è essa stessa il risultato sia di una costruzione astratta sia di una vasta pratica matematica, non un fatto assolutamente immune da revisioni, un carattere apodittico garantito da una capacità non-empirica di, appunto, «riconoscere ciò che è intrinsecamente evidente».

5. *Le «filosofie tradizionali» della matematica.*

Le tradizionali correnti filosofiche della matematica – formalismo, intuizionismo, logicismo – non sono riuscite a riconoscere i processi quasi-empirici attraverso i quali nuovi assiomi e principî, espliciti o impliciti, entrano a far parte del bagaglio degli assunti matematici accettati, ma questa incapacità si manifesta in diversi modi.

La scuola formalista (associata al nome di David Hilbert) distinse la matematica in una parte «reale» (che ha significato), che viene supposta invariabile, intrinsecamente evidente e costituita dalla sola «aritmetica finitaria», cioè da ragionamenti della teoria costruttiva dei numeri, e una parte «ideale»: tutto il resto, per cui era richiesta solo una dimostrazione di consistenza e non significato o verità. Il fatto che gli assiomi della teoria degli insiemi non fossero pensati come veri o falsi può spiegare la mancanza d'interesse dei formalisti per il problema dell'origine di questi assiomi. È cosa ben nota che il programma dei formalisti, di trovare dimostrazioni finitarie di consistenza per la teoria degli insiemi o persino per l'analisi, fallí. Ciò che meno spesso viene valutato appieno è che anche se i formalisti avessero dimostrato la consistenza dell'analisi, questo non avrebbe spiegato l'applicabilità dell'analisi e della matematica superiore in generale, al di fuori della matematica pura. L'indifferenza dei formalisti per la pratica (fuori dell'ambito della matematica pura) e per la storia (anche nell'ambito della matematica pura) li spinge a ridurre l'intera questione dell'epistemologia della matematica a una semplicistica ricerca di «consistenza». Gli intuizionisti, d'altra parte, tendevano a conservare l'idea

secondo cui la matematica sarebbe costituita da asserzioni dotate di senso. Ma, slittando in una direzione idealista, interpretarono la matematica piú o meno come «costruzioni mentali» (il che significa che essi attribuirono scarsissimo valore all'interesse per ogni aspetto non strettamente mentale). Inoltre gli intuizionisti richiesero una nozione di «necessità» fenomenologica che non erano affatto in grado di spiegare, a meno che un paio di riferimenti a Kant valgano come spiegazione! Apparentemente, esistono verità a priori a proposito delle «costruzioni mentali» che noi possiamo a malapena intuire – alcune delle quali (per esempio l'affermazione «Ogni numero ha un successore») implicano idealizzazioni che non hanno niente a che vedere con ciò che la mente umana è oggettivamente in grado di elaborare.

Un intuizionista direbbe che il problema posto in questo articolo non rientra nel suo modo di vedere, poiché, affermerebbe lui, la teoria degli insiemi è intuizionisticamente priva di significato. Egli non accetterebbe per esempio l'assioma della scelta né quello di sostituzione. Quindi potrebbe a sua volta domandare: «Dove sta il problema?» Se i matematici classici hanno continuato ad ampliare la matematica aggiungendo assiomi che non sono in realtà intrinsecamente evidenti, questo è proprio un motivo in piú per rinunziare alla matematica classica.

Di fatto però il problema resta, sebbene gli esempi siano parzialmente diversi. In primo luogo, l'intuizionista imita la matematica *classica* nell'identificare gli oggetti geometrici con i loro corrispondenti aritmetici (*mediante* la geometria analitica). Ma ciò rientra nella tradizione matematica – tradizione che poggia, come abbiamo visto, sul successo dell'approccio di Descartes. Decidere che l'intuizione matematica è intuizione aritmetica – decidere di ignorare proprio l'intuizione geometrica – è un accettazione camuffata del principio di corrispondenza. In secondo luogo, anche nell'ambito della matematica intuizionista esistono nozioni (esempio: dimostrazione costruttiva) la cui teoria informale contiene paradossi logici simili a quelli della teoria degli insiemi. Gli intuizionisti evitano tali paradossi utilizzando una specie di teoria dei tipi che ricorda quella di Russell; ancora una volta, ciò ha tutta l'aria di un prestito, non riconosciuto, da tutta l'esperienza della matematica classica. (Dal momento che la nozione di dimostrazione costruttiva è una nozione essenzialmente non predicativa – molti argomenti intuizionisti esigono dimostrazioni costruttive che coinvolgono la *totalità* delle dimostrazioni costruttive –, non è affatto «evidente», rispetto all'interpretazione intuizionista dei connettivi logici che assume la «dimostrazione costruttiva» come nozione base, se siano giustificate le restrizioni della teoria predicativa dei tipi). Infine, anche concedendo agli intuizionisti la loro versione della logica, la loro restrizione della matematica all'aritmetica (compresa l'analisi costruttiva), ecc., rimane il fatto che, per fare concretamente della matematica intuizionista, Brouwer ha dovuto aggiungere degli assunti (camuffati da dimostrazioni informali) che non sono piú evidenti di quanto non lo siano nella matematica classica la scelta o la sostituzione. (Mi riferisco alle sue «dimostrazioni» dei cosiddetti *Bar Theorem* e *Fan Theorem*). Anche nella corrente intuizionista, ovviamente, continua

tuttora la scoperta di nuovi (anche se non esplicitamente enunciati) assiomi ed assunti.

I logicisti costituirono meno «una scuola» che non gli intuizionisti e i formalisti e non svilupparono mai un atteggiamento uniforme nei confronti dei fondamenti della matematica. L'ala logico-positivista del movimento considerò gli assiomi matematici «veri per convenzione», una visione che viene oggi considerata incoerente (in parte come risultato del devastante criticismo di Quine nel suo famoso articolo *Truth by Convention* [1936]). Il Russell dei *Principia mathematica* [Russell e Whitehead 1910] considerava gli assiomi matematici come *sintetici*; ma egli non diede mai una vera e propria spiegazione della natura della nostra conoscenza delle verità logica e matematica. Per lui, la cosa piú importante era mettere in evidenza che la verità matematica ha le stesse caratteristiche della verità logica (credo che da questo punto di vista avesse ragione), piuttosto che sviluppare una teoria della conoscenza della verità logica. Molti critici del logicismo ne ricavarono che Russell credesse che le verità logiche fossero analitiche e che lo scopo dei *Principia* fosse quello di mostrare, riducendo la matematica alla logica, come anche in essa tutto sia analitico; ma questo non è ciò che Russell pensava a quel tempo. Piú tardi – dopo la prima guerra mondiale – sotto l'influenza di Wittgenstein egli fu portato a credere che la logica e la matematica consistessero di «tautologie»; ma perfino nei *Principles of Mathematics* [1903] riteneva che tale «riduzione della matematica alla logica» mostrasse che la logica è sintetica (cosa che mi trova d'accordo), e non che la matematica è analitica.

6. *Platonismo tradizionale e platonismo di Gödel.*

Il platonista tradizionale ha a disposizione un argomento che può usare per sminuire il significato di ciò che si è definito «processi quasi-empirici» nella storia della matematica. Esso consiste nell'usare la nozione di svista. A volte ci si lascia sfuggire una verità necessaria (ad esempio, qualcuno può non rendersi conto – finché non viene posto in rilievo – che un cubo deve avere sei facce), oppure s'inciampa in un errore grossolano e si assume per necessariamente vero ciò che è falso o incompleto, come quando si accetta una dimostrazione non vera. Però assimilare abbagli e sviste di questa portata all'«incapacità di vedere» che esiste una corrispondenza tra i numeri reali e i punti della retta, oppure che esistono insiemi di insiemi di numeri interi, oppure che l'assioma della scelta è vero, vuol dire ignorare differenze che hanno grande significato metodologico. Anche se esistesse qualcosa di simile alla verità assolutamente necessaria (nel senso di verità immune da revisione) e anche se fosse stata fornita qualche teoria epistemologica per sostenere e spiegare una tale affermazione – e le teorie di Kant sono oggi difficilmente accettabili – ancora una volta, l'errore maggiore nel compiere questa assimilazione è che essa stravolge la vera metodologia dalla matematica. Dal punto di vista dell'«abbaglio», una «mente razionale» potrebbe accettare l'esistenza di insiemi

di insiemi proprio sulla base dell'«intuizione» e non perché è stata costruita una *teoria* degli insiemi; una «mente razionale» potrebbe accettare la corrispondenza tra punti sulla retta e numeri reali proprio sulla base dell'«intuizione», non a causa della grande ampiezza della teoria e della pratica, coronata da successo, basata sul principio di corrispondenza. Siamo convinti che ogni teoria filosofica che consideri un tale edificio teorico e pratico metodologicamente irrilevante, non può essere corretta. L'intuizione certamente svolge un ruolo; ma qualunque cosa possa essere l'«intuizione», non è una guida infallibile e non l'unica fonte della nostra conoscenza, anche nella matematica.

Un altro procedimento tradizionale è discutere di «esperimenti mentali» (nel senso kantiano). Ma Zermelo *non* si richiamò appunto a «esperimenti mentali» ma alla necessità per la scienza; e non è facile capire quale «esperimento mentale» possa stabilire la verità necessaria del principio di corrispondenza.

Se le spiegazioni «platoniste» tradizionali sembrano fallire, la versione del platonismo esposta da Kurt Gödel ha generato un diffuso interesse a dispetto delle nozioni squisitamente metafisiche che egli impiega. Per Gödel, i concetti sono «reali» esattamente come oggetti fisici; egli afferma che l'«evidenza» relativa all'esistenza dei concetti è valida quanto quella dell'esistenza degli oggetti fisici. (L'analogia tra la conoscenza matematica e la conoscenza nella fisica, qui sostenuta, è dovuta a Gödel e – indipendentemente – a Quine, sebbene Quine sia scandalizzato dalla metafisica di Gödel). L'aspetto metafisico del pensiero di Gödel – «metafisico» nel senso di gratuitamente speculativo – è la sua fede in un'interpretazione essenzialmente dualista della mente. La mente, nell'interpretazione di Gödel, è essenzialmente un ente immateriale (Wang riferisce conversazioni con Gödel nelle quali quest'ultimo avanza una teoria della reincarnazione simile a quella di Platone, almeno sul piano speculativo). «L'intuizione», nell'ottica di Gödel, è una particolare facoltà di percepire i concetti. Questa facoltà egli la considera indefinitamente perfezionabile (attraverso successive reincarnazioni?) Cosí altri assiomi possono sempre diventare «evidenti» alle nostre menti.

Mentre il dualismo che Gödel difende mi pare infondato e antiscientifico, alcuni aspetti del suo pensiero sono estremamente attraenti ed è necessario, penso, che vengano inseriti in ogni sensata spiegazione realista della conoscenza. L'idea che ciò che è «intrinsecamente evidente» varia nel tempo è un'idea importante. Ma mentre Gödel attribuirebbe ciò al perfezionamento di una facoltà essenzialmente misteriosa di «intuizione», mi parrebbe piú plausibile attribuire questo fenomeno al fatto che ciò che chiamiamo «evidenza intrinseca» o «necessità» è tipicamente, se non sempre, intrinsecamente evidente nell'ambito di una teoria. Stabilita una base della teoria e della conoscenza, alcune affermazioni possono essere talmente centrali, possono essere a tal punto presupposte da gran parte di ciò che pensiamo e facciamo, che nessuna esperienza è in grado *da sola* di contraddirle (benché tali affermazioni vengano occasionalmente capovolte quando una mente creativa produce una nuova teoria che incorpora la negazione di qualcuna di tali affermazioni e mostra che può sistematizzare i fatti in modo attraente). Cosí, le affermazioni della geometria

euclidea non avrebbero potuto essere contraddette da alcun esperimento, tuttavia esse vennero rovesciate (come descrizione dello spazio attuale) dopo l'invenzione della geometria non-euclidea e dopo che la teoria della relatività creò un nuovo contesto teoretico. Se l'evidenza intrinseca dipende dalle nostre teorie e dalle applicazioni che da esse derivano, allora, dal momento che le nostre teorie si sviluppano e variano continuamente, ci dobbiamo aspettare che nuove cose possano diventare «evidenti». (In questa impostazione, a differenza che in Gödel, cose che erano in precedenza «evidenti» possono anche cessare di esserlo. Dal punto di vista di Gödel, mettere in discussione ciò che era ritenuto precedentemente «intrinsecamente evidente» equivale ad ammettere un errore: la nostra vista eterea non sarebbe cioè stata messa a fuoco sufficientemente bene).

Ciò che è piú originale ed importante nella filosofia della matematica di Gödel, tuttavia, non ha niente a che fare con la sua impostazione preempiricistica e prekantiana circa i «concetti» e l'«intuizione». Ciò che colpisce maggiormente è che a differenza di altri filosofi della matematica di stampo aprioristico, egli riconosce gli aspetti quasi-empirici della matematica e non li relega al livello di semplice «psicologia». Egli è disposto a basare la conoscenza matematica sui *due supporti* dell'intuizione (della quale fornisce un'interpretazione sostanzialmente medievale) *e* della verifica pratica. È sorprendente e suggestivo che due filosofi cosí distanti nel modo di vedere e nei presupposti come Quine e Gödel – un empirista radicale e un platonista radicale – abbiano potuto convergere nell'idea che gli assiomi matematici vengono confermati (almeno in parte) dalla loro «necessità per la scienza» e che la conoscenza dell'esistenza di «oggetti» matematici ricalca la conoscenza dell'esistenza degli oggetti materiali.

7. *Conclusione.*

È ovvio che questa nuova idea concernente la natura della conoscenza matematica comporta una moltitudine di nuovi problemi. Esistono nuovi problemi metodologici: per esempio, è un fatto che alcune parti della matematica sono sostenute da applicazioni sia in matematica che nella scienza empirica, mentre gli assiomi della teoria superiore degli insiemi si applicano solo nella matematica stessa (e l'assioma di sostituzione soltanto nella stessa teoria degli insiemi). Questo significa forse che si dovrebbero considerare queste ultime parti della matematica come piú speculative, verificate meno bene, rispetto alle altre parti che sono suscettibili di applicazioni all'*esterno* della matematica? Sarei personalmente incline a dare risposta affermativa, ma Gödel e molti altri – forse la maggior parte dei cultori di teoria degli insiemi – sarebbero in violento disaccordo. Certamente sono necessarie discussioni e ricerche innumerevoli circa il carattere della verifica «quasi-empirica». Ed esistono problemi psicologici: per esempio, se si fosse sul punto di arrivare a capire che la matematica è piú «empirica» di quanto non si pensi, si sarebbe anche vicini a dire che «la scienza empirica» è piú a priori di quanto non si ritenga. È chiaro,

in base ad argomentazioni strettamente combinatorie, che se si procede nella scienza empirica cercando di eliminare le ipotesi una per una, esaminando in modo esaustivo tutte le ipotesi che comunque non superano una certa complessità, le probabilità di incappare nell'ipotesi vera, in un dato ambito – ammesso che essa esista – sarebbero estremamente piccole. L'intuizione umana non è infallibile come l'apriorista vorrebbe (né gli insuccessi possono essere tutti degradati al rango di abbagli e sviste); ma essa è molto miglior guida alla verità o alla verità approssimata di quanto l'empirista sappia spiegare. In una nuova impostazione concettuale, ci si trova di fronte a un problema invero molto antico: qual è la natura dell'intuizione umana, e perché essa funziona cosí bene? [H. P.].

Gödel, K.
1944 *Russell's Mathematical Logic*, in *The Philosophy of Bertrand Russell*, Tudor, New York.
1947 *What is Cantor's Continuum Problem?*, in «The American Mathematical Monthly», LIV, pp. 515-25.

Putnam, H.
1971 *Philosophy of Logic*, Harper, New York (trad. it. Isedi, Milano 1975).
1975 *What is Mathematical Truth*, in *Philosophical Papers*, I. *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, New York.

Quine, W. van Orman
1936 *Truth by Convention*, in O. H. Lee (a cura di), *Philosophical Essays for A. N. Whitehead*, Longmans and Green, New York, pp. 90-124.
1951 *Two Dogmas of Empiricism*, in «Philosophical Review», LX, pp. 20-43; ora in *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge Mass. 1961² (trad. it. Astrolabio, Roma 1966).
1963 *Set Theory and its Logic*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

Russell, B.
1903 *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. it. Longanesi, Milano 1963).

Russell, B., e Whitehead, A.
1910 *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zermelo, E.
1908 *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, in «Mathematische Annalen», LXV, pp. 107-28.

Il concetto di dimostrazione, che è alla base di molti ragionamenti scientifici (cfr. per esempio **scienza, analisi/sintesi, causa/effetto, teoria/pratica**), viene soprattutto utilizzato con il significato di prova matematica. Il concetto di deduzione interviene invece nella **logica** (cfr. **formalizzazione**) e in particolare nella **ricorsività**. Tuttavia le verità logiche e matematiche non sono un **dato** invariabile giacché anch'esse sono oggetto di **verificabilità/falsificabilità**, come risulta dalla storia ad esempio degli assiomi della teoria degli insiemi (cfr. **assioma/postulato, insieme**), in cui è stato fondamentale il successo pratico dell'assioma assunto.

Equivalenza

Per l'equivalenza al livello della logica elementare c'è almeno una procedura completa di dimostrazione, benché non ci sia una procedura completa di refutazione; per l'equivalenza matematica in generale, come conseguenza del teorema di Gödel, non c'è neppure una procedura completa di dimostrazione. Ma la nozione di equivalenza filosoficamente importante oggi non è la nozione di equivalenza logica o matematica, ma piuttosto quella di equivalenza conoscitiva di intere teorie e, in particolare, di sistemi teorici che sono, presi letteralmente, incompatibili. A questo argomento, l'equivalenza conoscitiva di teorie e sistemi concettuali, in particolare sistemi che sono apparentemente incompatibili, è dedicato il presente articolo.

1. *Equivalenza come nozione filosofica.*

Per un tipo di filosofi realisti tradizionali la specie di equivalenza che si sta discutendo non esiste affatto. Un realista di tal fatta è quello che crede, come Lenin [1909], che le teorie siano semplicemente «copie» del mondo. Se il realismo è identificato con l'idea che ci sia una (e una sola) teoria vera sul Tutto, allora il realismo è proprio la negazione dell'idea che ci sia una pluralità di descrizioni equivalenti del mondo (eccettuati i casi non controversi dell'equivalenza logica e matematica). Oggi però pochi filosofi di stampo realista, se pure ce n'è qualcuno, desidererebbero essere identificati con questo tipo di realismo. Sia gli sviluppi della matematica sia quelli della fisica hanno reso insostenibile l'idea dell'Unica Teoria Vera, per lo meno se non si accompagna l'asserzione che c'è «una teoria vera» con l'importante glossa che contare le teorie non è facile: quelle che sembrano essere teorie diverse possono essere solo, come ha recentemente mostrato Quine, «versioni» di una stessa teoria. Ma il realista che glossi la sua credenza nella Teoria Vera in tal modo ammette che teorie diverse al livello della «grammatica superficiale», e anche al livello dell'equivalenza matematica e logica (cioè che sono diverse, o anche incompatibili, nel significato letterale), possono essere simultaneamente vere. Se tali teorie sono «una» a qualche livello piú profondo (se sono in qualche modo descrizioni equivalenti), allora si deve dare una spiegazione di come questo sia possibile, di come cioè teorie che non sono matematicamente equivalenti, possano esserlo conoscitivamente.

2. *«Experience and Prediction» di Reichenbach.*

Uno dei primi tentativi di dare una teoria delle descrizioni equivalenti autocosciente e pienamente elaborata è dovuto a Hans Reichenbach, che ha

discusso l'argomento nel suo grande trattato epistemologico *Experience and Prediction* [1938] e l'ha anche applicato in importanti libri sulla filosofia dello spazio e del tempo [1928] e sulla filosofia della meccanica quantistica. Benché, a nostro parere, il trattamento dell'equivalenza in Reichenbach non sia riuscito, le difficoltà e le tensioni nel lavoro di Reichenbach illustrano mirabilmente i problemi in questo campo.

Secondo i positivisti (intesi da Reichenbach come gli aderenti alle idee iniziali del Circolo di Vienna, quali quelle espresse per esempio nel famoso libro di Ayer *Language, Truth and Logic* [1946]) il significato di una asserzione consiste nel suo metodo di verifica. In una forma molto primitiva, che Ayer *non* condivise, la verifica era supposta definitiva: le esperienze avrebbero verificato o falsificato un'asserzione per sempre (questa forma sopravvive oggi, specialmente fra i sociologi, col nome di «operazionismo»). Se questa teoria positivista del significato fosse risultata corretta, l'equivalenza sarebbe facilmente spiegata: due asserzioni sarebbero conoscitivamente equivalenti quando le stesse esperienze le verificano e le stesse esperienze le falsificano. Però Reichenbach indicò una difficoltà decisiva per questa forma di verificazionismo: in generale un risultato osservabile, ad esempio l'osservazione di una lettura di contatore in fisica, verifica un'asserzione empirica (ad esempio «La corrente passa nel filo») solo con una certa probabilità, e non in modo definitivo. L'operazionismo e il positivismo rozzo distorcono l'effettivo funzionamento dei concetti scientifici, travisando ciò che è in realtà una inferenza probabilistica (che richiese la conferma di una larga parte di teoria fisica) in una semplice applicazione di una cosiddetta «definizione operazionale». L'asserzione «La corrente passa nel filo se e solo se l'ago del voltmetro è deviato» viene a volte riferita come una definizione operazionale, ma ciò non comporta che sia una stipulazione di significato. In realtà, è solo approssimativamente vera; un'asserzione piú accurata sarebbe «Il 99 per cento delle volte la corrente passa nel filo se e solo se l'ago del voltmetro è deviato», o qualcosa del genere.

Reichenbach propose quindi la seguente «teoria probabilistica del significato»:

1) Un'asserzione è significante se e solo se è possibile (tramite le procedure della logica induttiva, di cui Reichenbach era una delle massime autorità a quel tempo) assegnare ad essa un *peso*, cioè una valutazione di probabilità, in qualche situazione osservabile e fisicamente realizzabile.
2) Due asserzioni hanno lo *stesso* significato se e solo se esse ricevono lo stesso peso in ciascuna di tali situazioni.

Se si applicano questi due principî non solo a singole asserzioni ma anche a intere teorie, come Reichenbach intendeva, si ha un criterio per l'equivalenza conoscitiva, che è ciò che si cercava. Ma con tale criterio sorgono dei problemi, come si vedrà presto.

Prima però va esaminato l'uso che Reichenbach stesso fece del suo criterio. In un'affascinante discussione (il «mondo cubico») egli mette in guardia contro un possibile fraintendimento della sua teoria: egli *non* la intende in modo

che due teorie con le stesse conseguenze controllabili risultino descrizioni equivalenti.

3. *Il «mondo cubico».*

Il caso che Reichenbach descrive è il seguente: s'immagini un mondo in cui ogni osservatore intelligente viva in una regione racchiusa in un gran cubo trasparente. Il materiale di cui il cubo è costituito permette il passaggio di luce sufficiente affinché gli oggetti fuori del cubo producano ombre visibili all'interno di esso, ma nessun altro segnale causale di qualunque tipo passa attraverso le sue pareti. Le leggi fisiche di questo universo sono tali che il cubo non si può spezzare, e gli osservatori all'interno del cubo non possono mai uscire fuori di esso per fare osservazioni dirette di ciò che c'è «all'esterno».

Si supponga che ci siano uccelli sia fuori sia dentro il cubo, e che quelli fuori producano ombre sulle pareti del cubo. Queste ombre sono state a lungo osservate dagli scienziati del mondo cubico, ed è stata formulata in termini statistici una descrizione esatta dei tipi di ombre, dei periodi dell'anno in cui esse vengono viste e della frequenza con cui ciascun tipo di ombra è visto in un dato periodo dell'anno o del giorno. Gli scienziati, notando la somiglianza di tali ombre con le ombre degli uccelli che sono loro familiari tramite la conoscenza che hanno degli uccelli all'interno del cubo (e la loro conoscenza dell'ottica), deducono naturalmente che ci sono uccelli fuori del cubo, e che le ombre sono prodotte da qualcuno di essi.

Ora, una disputa filosofica scoppia fra gli epistemologi. Un gruppo – i positivisti – argomenta cosí: «L'asserzione che "ci sono uccelli fuori del cubo" è verificata quando e solo quando si vedono ombre (di forma e movimento cosí e cosí) sulle pareti. Quindi tutto ciò che tale asserzione significa è che si vedono ombre (di forma e movimento cosí e cosí) sulle pareti. Parlare di "uccelli fuori del cubo" è, in realtà, parlare in modo molto mediato delle ombre viste entro il cubo».

Il secondo gruppo – i realisti – replica: «Assurdo! Gli uccelli sono una cosa e le ombre un'altra. Ovviamente l'asserzione "Ci sono uccelli fuori del cubo" significa di piú che, semplicemente, "Si vedono ombre all'interno del cubo"».

Reichenbach si allinea coi realisti in tale disputa, e difende la loro posizione, sulla base della sua teoria probabilistica del significato, come segue: tenuto conto dei dati osservativi disponibili all'interno del cubo, l'asserzione che ci sono ombre sulle pareti ha praticamente probabilità uno. È certo (trascurando la possibilità infinitesima di un'allucinazione collettiva o qualcosa del genere) che ci sono ombre sulle pareti. L'asserzione che ci sono uccelli fuori del cubo non segue *deduttivamente* dall'osservazione delle ombre di forma e movimento considerate, anche se si assume che le leggi dell'ottica siano le stesse dentro e fuori del cubo, perché altri oggetti *potrebbero* produrle. Ma la normale induzione imporrebbe di dover assegnare un'alta probabilità, benché significativamente inferiore a uno, alla conclusione che tali ombre sono prodotte da

uccelli. Poiché il peso assegnato all'asserzione «Si vedono ombre sul muro» è uno, mentre il peso assegnato all'asserzione «Ci sono uccelli fuori del cubo» è minore di uno, le due asserzioni *non* hanno lo stesso significato in base al secondo principio della teoria probabilistica del significato.

Ciò che Reichenbach dice è che la verifica è questione di grado e che, dati i nostri attuali criteri per assegnare il grado con cui le asserzioni sono verificate, due asserzioni che hanno le stesse «conseguenze controllabili» possono essere verificate con gradi differenti, e non essere cosí equivalenti. L'identità di conseguenze controllabili non è un buon criterio per l'equivalenza.

4. *Il caso degli adoratori di gatti.*

È istruttivo paragonare l'analisi di Reichenbach del mondo cubico con l'analisi da lui fatta nello stesso libro di un altro esempio immaginario. Egli immagina un gruppo di adoratori di gatti, i quali sostengono che i gatti sono animali divini. Quando si chiede loro quali prove ci siano che questo sia vero, o quali conseguenze controllabili abbia la loro fede, essi rispondono che i gatti incutono timore (negli adoratori di gatti).

Reichenbach tratta sommariamente questo esempio, proprio come Carnap [1928] tratta una quantità di famosi rompicapo filosofici. Secondo Reichenbach le due asserzioni «I gatti sono animali divini» ed «I gatti incutono timore (nei loro adoratori)» sono conoscitivamente equivalenti. In verità la prima asserzione ha un elemento di significato (un «significato trascendente») che manca nella seconda, ma questo significato trascendente è conoscitivamente spurio.

Ciò che è singolare è che Reichenbach non dedica a questo esempio niente dell'attenzione dedicata al caso del mondo cubico. Non si chiede se l'asserzione «I gatti sono animali divini» è incorporata in una teoria (come sicuramente sarebbe, se fosse realmente una credenza religiosa), né se tale teoria possa avere qualche grado di sostegno induttivo. In realtà egli fa qui proprio come ci metteva in guardia dal fare nel caso del mondo cubico: salta dal fatto che le due asserzioni hanno le stesse conseguenze controllabili alla conclusione che esse sono equivalenti.

Il motivo non è difficile da capire: molti filosofi empiristi vogliono eliminare la metafisica in quanto concettualmente confusa. Un modo (particolarmente rozzo) di farlo è sostenere che le espressioni metafisiche sono senza significato. Però alcune espressioni metafisiche e religiose hanno conseguenze controllabili; cosí, in tal caso, quegli empiristi – fra cui Reichenbach – i quali hanno cercato un principio che eliminasse una volta per tutte le espressioni metafisiche dal campo del significante, hanno riunito semplicemente le conseguenze controllabili dell'espressione in questione e hanno stabilito che l'espressione fosse, in pratica, conoscitivamente equivalente alla congiunzione (in genere banale) delle sue conseguenze controllabili. In effetti, Reichenbach dice che «i gatti sono animali divini» è senza significato per il 99 per cento, e l'1 per cento del suo significato è «I gatti incutono timore (nei loro adoratori)».

Un tale uso della nozione di «significato» è riconosciuto oggi cattivo sia dal punto di vista semantico che da quello filosofico. In questo articolo si supporrà che, nel cercare una nozione di equivalenza conoscitiva, lo scopo *non* sia quello di dichiarare inesistenti i problemi metafisici. In verità, proprio l'esempio di Reichenbach sul mondo cubico mostra come un verificazionista sofisticato *possa* (quando vuole) trovare differenze di significato conoscitivo tra teorie con le stesse conseguenze controllabili.

5. *La critica di Quine alla teoria probabilistica del significato.*

Nel suo famoso articolo *Two Dogmas of Empiricism* [1951], Quine critica una forma di verificazionismo che è notevolmente simile alla teoria probabilistica del significato di Reichenbach. Quine considera la teoria secondo cui due asserzioni hanno lo stesso significato esattamente quando hanno lo stesso dominio di esperienze confermanti e lo stesso dominio di esperienze infirmanti. Essa assomiglia alla teoria di Reichenbach, solo che: 1) Quine parla di esperienze e Reichenbach di osservazioni fisicamente realizzabili; 2) Quine trascura il grado numerico con cui una data esperienza di conferma o di infirmazione conferma o infirma un'asserzione, mentre Reichenbach parla di peso numerico. (In pratica, la teoria criticata da Quine chiede soltanto se il «peso» è grande o piccolo. Se due asserzioni hanno peso grande – cioè sono confermate – o piccolo – cioè sono infirmate – nella stessa esperienza, esse dovranno essere considerate come aventi lo stesso significato in tale teoria; mentre la teoria piú raffinata proposta da Reichenbach richiede che in ciascuna di tali esperienze il peso sia esattamente lo stesso). Nonostante le differenze tra la teoria considerata da Quine e la teoria proposta da Reichenbach, la critica di Quine si applica anche a quest'ultima.

In breve, la critica di Quine è che l'errore sta nell'assumere che esista qualcosa di simile al *dominio di esperienze* confermanti (o infirmanti) di un'asserzione isolata. Un'asserzione, dice Quine, può essere confermata o infirmata solo nel contesto di una vasta teoria, almeno in generale. L'idea che i metodi di verifica possano fornire un concetto di significato per asserzioni singole non tiene conto del fatto che le nostre credenze «si sottopongono al tribunale dell'esperienza collettivamente» e non a una a una.

Si può vedere che Quine ha ragione considerando proprio il caso che Reichenbach ha discusso: l'esempio del mondo cubico. L'assegnazione di un peso numerico all'asserzione «Ci sono uccelli fuori del cubo» era fatta *stimando la probabilità* che ombre di quella forma e movimento fossero prodotte da uccelli invece che da altri tipi di oggetti opachi. Questo chiaramente presume: 1) che le leggi dell'ottica siano le stesse dentro e fuori del cubo; 2) un vasto corpo di conoscenza su uccelli e altri tipi di oggetti, che inoltre si considera valido anche fuori del cubo (o probabilmente valido, benché sia un bel rompicapo l'assegnare un numero alla probabilità, come richiesto dalla teoria di Reichenbach). Cosí è solo nel contesto di una vasta teoria che si può assegnare

un «peso», numerico o anche qualitativo (ad esempio «grande» o «piccolo»), all'asserzione «Ci sono uccelli fuori del cubo». Se tutto ciò che si ha è la descrizione di una situazione osservabile, e non si sa quale teoria si suppone di considerare insieme con l'asserzione «Ci sono uccelli fuori del cubo», allora la domanda «Quale peso ha l'asserzione in questa situazione osservabile?» non ha un significato chiaro.

Reichenbach avrebbe forse replicato che esiste il peso che un'asserzione riceverebbe in una situazione osservabile se si facessero le migliori inferenze induttive (intendendo con ciò anche di considerare le migliori teorie); ma un tale «peso» idealizzato non è assolutamente calcolabile in pratica. In realtà non si può affatto, generalmente, assegnare probabilità numeriche alla maggior parte delle asserzioni, anche quando sia data la teoria che realmente si considera; e paragonare i pesi che le asserzioni riceverebbero se noi fossimo giudici induttivi ideali e considerassimo tutte le possibili teorie è certo fuori delle possibilità di chiunque. Anzi, sarebbe addirittura possibile dubitare che la nozione di «migliore inferenza induttiva possibile» abbia un senso ben definito.

Il rapporto tra questa difficoltà e il progetto di definire l'equivalenza è chiaro. Se non esiste il «peso» di un'asserzione isolata da una teoria che la contenga, non c'è neppure il «peso» di una teoria isolata da uno sfondo di altre premesse di vario tipo: ipotesi ausiliari, premesse metodologiche, ecc. Il peso di una teoria dell'evoluzione, per esempio, dipende dalla valutazione di vari tipi di certezze geologiche, paleontologiche, ecc. e per questo si fa appello alla fisica, alla geologia, alla genetica, alla biologia molecolare, ecc. Chiedere se due teorie abbiano lo stesso peso in ogni situazione è fare, in generale, una domanda che non ha risposta precisa, perché non si ha alcuna idea del peso che anche una sola teoria può ricevere in *ogni* situazione. Cercare di definire l'equivalenza in termini di «peso», o grado di conferma, è cercare di definire qualcosa di non chiaro in termini di ciò che è ancora meno chiaro.

Questo illustra un aspetto del criterio di Reichenbach: tale criterio può essere usato in modo convincente per provare che due teorie o asserzioni *non* sono equivalenti (ad esempio «Ci sono uccelli fuori del cubo» e «Si vedono ombre, di forma e movimento cosí e cosí, sulle pareti del cubo»), perché è sufficiente descrivere una situazione (comprendente una teoria di sfondo) in cui le due teorie o asserzioni sono chiaramente confermate con due gradi differenti (ricevono «pesi» diversi) per mostrare la *non*-equivalenza. Ma non c'è alcun modo ovvio di usare il criterio per provare che due asserzioni o teorie *sono* equivalenti; e, come si è visto sopra, quando Reichenbach afferma che due asserzioni sono equivalenti (ad esempio «I gatti sono animali divini» e «I gatti incutono timore nei loro adoratori»), egli in realtà non fa uso del suo criterio.

6. *La teoria della relatività ristretta.*

Poiché i tentativi (o almeno i tentativi neopositivisti, come quello di Reichenbach) di definire la nozione di equivalenza (identità di significato) si sono rivelati infruttuosi, si esamini ora l'uso di questa nozione in rapporto alla teoria della relatività ristretta. È stata infatti questa teoria che è sembrata richiedere una tale nozione, e molti dei tentativi di applicare la nozione di equivalenza alla filosofia dello spazio e del tempo derivano dalle varie descrizioni che i filosofi della scienza hanno dato della struttura logica e del significato epistemologico della relatività ristretta.

Siano A e B due sistemi inerziali. L'essenza delle nozione di sistema inerziale è che un tale sistema non ruota e non sperimenta accelerazioni di alcun tipo; cosí A e B devono essere o in quiete relativa o in moto con velocità relativa costante. Scegliendo A come sistema in quiete, allora B sarà descritto come in moto con velocità costante v (si supponga $v \neq 0$, cioè A e B non sono in quiete relativa). Se si sceglie B come sistema in quiete, allora A sarà descritto come in moto con velocità costante $-v$. Tutto ciò è noto dalla fisica classica e dalle discussioni filosofiche classiche sulla relatività del moto.

Dal punto di vista matematico considerare A come sistema in quiete, piuttosto che B corrisponde a una trasformazione del sistema di coordinate. Nella fisica classica, questa è una cosiddetta trasformazione galileiana. Se si suppone che gli orologi nel sistema A siano fisicamente identici a quelli nel sistema B, allora nella fisica classica la coordinata del tempo in A, sia essa t, e la coordinata del tempo in B, sia essa t', possono solo differire per una costante: $t = t' + k$. In particolare, allora, due eventi che sono *simultanei* in un sistema sono simultanei nell'altro; e due eventi che differiscono nel tempo di r secondi in un sistema, differiranno di r secondi nell'altro.

Secondo la teoria della relatività ristretta, il cambiamento dal sistema A al sistema B ***non*** è correttamente rappresentato da una trasformazione galileiana. Se si vogliono invece ottenere previsioni corrette, si deve usare una diversa trasformazione matematica (una cosiddetta trasformazione di Lorentz) per determinare le coordinate di un evento in B dalle sue coordinate in A, o viceversa. (Tutto ciò si può cosí visualizzare geometricamente: i due sistemi, se sono in moto relativo, non concordano né per quanto riguarda la distanza spaziale, né per quanto riguarda la distanza temporale fra eventi, ma sono collegati in modo che concordino per quanto riguarda la distanza spazio-temporale fra due eventi; quest'ultima quantità può essere definita in entrambi i sistemi con l'espressione $(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)^{1/2}$, dove c è la velocità della luce. L'esistenza di questa nuova quantità invariante – la distanza spazio-temporale – è l'aspetto caratteristico della nuova teoria). Ciò ha molte conseguenze sorprendenti. Anche se i metri in A sono fisicamente identici ai metri in B, la lunghezza degli oggetti misurata in B è diversa dalla lunghezza degli stessi oggetti misurata in A. In realtà, il sistema «in movimento» B sembra *piú corto* visto da A di quanto appaia visto da B (e, simmetricamente, A sembra

piú corto visto da B che non visto da A). Ancora piú sorprendentemente, eventi che sono *simultanei* in un sistema non sono generalmente simultanei nell'altro, e la distanza temporale fra due eventi sarà descritta in modo diverso nei due sistemi. Piú la velocità v si avvicina a quella della luce c, piú tale fenomeno diventa significativo: se un sistema si muove relativamente all'altro con velocità praticamente uguale a quella della luce, può succedere che un evento duri anni se osservato da un sistema, e solo giorni o anche secondi se osservato dall'altro. Viceversa, se la velocità relativa v è piccola in rapporto a quella della luce, queste discordanze saranno sperimentalmente insignificanti, e questo è il motivo per cui la relatività della simultaneità, della lunghezza e della separazione temporale non furono notate dai fisici anteriori ad Einstein. Oggi che le particelle sono costantemente accelerate a velocità vicine a c nel grande acceleratore lineare di Stanford e in altri acceleratori europei e russi, i fenomeni previsti dalla relatività ristretta vengono osservati costantemente.

Sia (A) la descrizione del mondo nel sistema di coordinate A (immaginiamo che A sia la Terra, trascurando la sua accelerazione in un dato istante). Sia (B) la descrizione che otteniamo trasformando tutte le asserzioni della descrizione (A), secondo la trasformazione di Lorentz che corrisponde alla scelta di B come nuovo sistema in quiete (immaginiamo che B sia una navicella spaziale che si muova relativamente ad A ad $1/4$ della velocità della luce). Allora, dal punto di vista di osservatori nella navicella spaziale B, la descrizione (B) è la *vera* descrizione del mondo. Ma come può succedere questo? La descrizione (A) dice che due eventi X ed Y (ad esempio un'esplosione sulla Luna e un'esplosione su Marte) sono avvenuti simultaneamente e la descrizione (B) dice che X è avvenuto *prima* di Y. Come possono due descrizioni cosí palesemente contraddittorie essere *entrambe* vere?

7. *L'idea di varianza notazionale.*

La prima idea che logici e filosofi della scienza misero alla prova era molto naturale: essi cercarono di render conto dell'equivalenza delle diverse descrizioni che sorgono dalla scelta di sistemi diversi nella relatività ristretta come di un caso di semplice varianza notazionale. Essendo empiristi (come quasi tutti i filosofi della scienza) essi lo fecero in un modo che è in accordo con la tradizione dell'empirismo classico. Considerarono il cosiddetto «linguaggio osservativo», cioè la terminologia usata per riportare le osservazioni fatte in ciascun sistema, come se fosse un linguaggio *neutrale*. In verità asserzioni come «Un osservatore in A *ha visto* il suo orologio segnare le 12 quando ha schiacciato il pulsante» *sono* neutrali nella relatività ristretta, nel senso che sono vere in ogni sistema se sono vere in A stesso (ovviamente, esse non sono neutrali nel senso di *non presupporre alcuna teoria*, ed è questo il punto in cui la fiducia degli empiristi nella nozione di «linguaggio osservativo» in filosofia della scienza risultò mal posta. Ma ciò non invalida l'attuale discussione). Avendo a disposizione un linguaggio neutrale, essi cercarono di mostrare come termini

quali 'simultaneo', 'distanza' e 'separazione temporale' ricevono realmente definizioni diverse nei sistemi diversi, cioè definizioni diverse nel linguaggio osservativo neutrale. Poiché 'simultaneo', ad esempio, non ha la stessa definizione (relativamente al linguaggio neutrale) nelle due descrizioni (A) e (B), l'incompatibilità tra le asserzioni «X ed Y sono avvenuti simultaneamente» e «X ed Y non sono avvenuti simultaneamente» è reale solo quando tali asserzioni sono affermate da un osservatore relativamente allo stesso sistema; se d'altra parte un'asserzione occorre nella descrizione (A) ma l'altra occorre in (B), allora l'incompatibilità è solo apparente. Le descrizioni (A) e (B) sono allora equivalenti, nel senso che sono varianti notazionali una dell'altra.

Quest'idea è stata elaborata nella sua forma classica in Reichenbach 1928. Reichenbach analizza la situazione come segue: quando io vedo un evento distante, ad esempio mediante un telescopio, posso assegnare un tempo t all'evento se conosco la sua distanza (distanza che posso misurare usando un metro in quiete nel mio sistema per definire una rete di coordinate) e, inoltre, la velocità con cui la luce arriva da quella direzione lungo quel percorso. Io posso misurare la velocità della luce in andata e ritorno (la velocità media della luce in andata e ritorno lungo un percorso tra l'orologio standard nel mio sistema e uno specchio posto a una certa distanza da esso) se conosco la distanza dello specchio e i tempi di partenza e di arrivo del raggio di luce (ciò richiede solo l'impiego dell'orologio standard). Ma per determinare la velocità della luce in un senso (ad esempio la velocità che la luce ha andando *verso* lo specchio) avrei bisogno di due orologi, quello standard nel mio sistema e un altro posto vicino allo specchio, e *dovrei sapere che i due orologi sono sincronizzati*. Ma sapere questo è proprio sapere che, per esempio, essi segnano le 12 *simultaneamente*. Cosí sembra che io non possa determinare la simultaneità a distanza a meno che non possa dire che gli orologi sono sincronizzati, e che non possa dire che gli orologi sono sincronizzati finché non possa determinare la simultaneità a distanza!

La soluzione di Reichenbach è quella di dire che ho bisogno di ciò che egli chiama una *definizione di coordinamento* (in realtà, una definizione nel linguaggio neutrale) e che l'asserzione che la velocità della luce in un senso è uguale alla velocità in andata e ritorno (cioè che la luce viaggia con la stessa velocità in ogni direzione, relativamente al sistema) è una definizione del genere. Dire che la velocità della luce è indipendente dalla direzione *sembra* un'asserzione empirica; in realtà è una stipulazione di significato, che definisce la coordinata temporale t nel sistema per quegli eventi che non sono situati vicino all'orologio standard. Analogamente, ammessa una discordanza tra osservatori in sistemi diversi per quanto riguarda la lunghezza di un metro (noi sulla Terra diciamo che il metro della navicella è piú corto di un nostro metro, essi dicono che il nostro metro è piú corto di un loro metro), l'asserzione che i metri *in quiete* nel nostro sistema sono quelli realmente lunghi un metro sembra solo un'asserzione empirica; in realtà definisce la distanza spaziale nel nostro sistema di riferimento.

Cosí, nell'analisi di Reichenbach, quando un osservatore nel sistema A dice

«X ed Y sono avvenuti simultaneamente», ciò che intende è che i tempi *t* devono essere determinati usando segnali luminosi ed assumendo che la velocità della luce nel sistema A non dipenda dalla direzione (questa è la descrizione nel linguaggio neutrale di ciò che le asserzioni sul tempo significano nella descrizione (A)). Quando un osservatore nel sistema B dice «X ed Y non sono avvenuti simultaneamente», ciò che intende è che i tempi *t* di X ed Y non sono gli stessi, dove tali tempi *t* devono essere determinati usando segnali luminosi ed assumendo che la velocità della luce nel sistema B non dipenda dalla direzione (questa è la descrizione nel linguaggio neutrale di ciò che le asserzioni sul tempo significano nella descrizione (B)). Poiché le asserzioni si riferiscono a procedure di calcolo diverse nelle due descrizioni (A) e (B), l'incompatibilità è soltanto apparente.

L'analisi di Reichenbach della struttura logica della teoria della relatività ristretta lo portò a sviluppare tutta una teoria su quello che dovrebbe essere il compito della filosofia della scienza. La teoria della relatività ristretta ha dimostrato, secondo l'analisi di Reichenbach, che un'asserzione potrebbe sembrare una normale asserzione su un fatto empirico, ma essere in realtà una «definizione di coordinamento» mascherata. L'asserzione che la luce viaggia con velocità indipendente dalla direzione (in un particolare sistema) è *analitica* secondo la spiegazione di Reichenbach, cioè è una definizione o un'asserzione vera per definizione. D'altra parte, date le definizioni di coordinamento, l'asserzione che X ed Y sono avvenuti nel medesimo istante (in un certo sistema) e l'asserzione che il sistema in movimento è contratto nella direzione del suo moto sono asserzioni *sintetiche* (cioè asserzioni che sono vere nella realtà) ed asserzioni *empiriche* (cioè sperimentalmente controllabili). Reichenbach ritenne che il compito della filosofia della scienza fosse precisamente quello di fare il genere di lavoro che *lui* fece nel caso particolare della teoria della relatività ristretta, e precisamente di separare le asserzioni analitiche di una teoria scientifica da quelle sintetiche, di dirci quali asserzioni costituiscano le definizioni di coordinamento di una teoria fisica e quali le conseguenze sintetiche, empiriche.

8. *La critica di Quine della distinzione analitico-sintetico.*

Lo stesso articolo di Quine [1951] citato in precedenza contiene però una severa critica a questo tipo di programma. Quine sostiene, praticamente, che le asserzioni di una teoria fisica si sottopongono ai controlli sperimentali in duplice modo; se le previsioni della teoria non vengono confermate, si possono rivedere *o* le cosiddette «definizioni» della teoria, *o* le cosiddette «conseguenze empiriche». Inoltre, quando si decide quale delle asserzioni rivedere, è metodologicamente irrilevante che qualcuna di esse possa essere stata considerata una definizione. Anche se si era convenuto di considerare vera un'asserzione con qualche stipulazione convenzionale, la «verità per convenzione» non è un aspetto delle asserzioni che viene mantenuto. Alcune asserzioni di una

teoria fisica possono essere state accettate originalmente per convenzione, altre possono essere state adottate sulla base di esperimenti, ma una volta accettate esse hanno lo stesso status. *Non esiste l'analiticità nelle teorie scientifiche.*

(Quine ha una volta paragonato la domanda «Quali asserzioni di una teoria fisica sono definizioni?» alla domanda «Quali luoghi dell'Ohio sono punti di partenza?» Nessun luogo dell'Ohio è un «punto di partenza» di per sé; tutto dipende da quale viaggio si vuole intraprendere. Analogamente, nessuna asserzione di una teoria fisica è una definizione di per sé; può essere conveniente in un certo contesto chiamare un'asserzione definizione e un'altra teorema o conseguenza empirica, e piú conveniente in un altro contesto chiamare la seconda asserzione definizione e la prima teorema o conseguenza empirica).

Si può vedere la forza dell'argomento di Quine nel caso stesso della relatività ristretta; perché dovremmo dire che «La velocità della luce è indipendente dalla direzione» è la definizione e «Orologi che si muovono con la stessa velocità (nel sistema) restano sincronizzati» la conseguenza empirica, e non viceversa? Reichenbach stesso ammette che si potrebbero fare entrambe le cose nel contesto di una ricostruzione razionale. Ma allora, chiederebbe Quine, perché una «ricostruzione razionale» dovrebbe pretendere che queste due asserzioni non siano sullo stesso piano, quando lo sono nell'attuale metodologia della scienza?

9. *L'equivalenza.*

Per quanto attraente, l'idea che descrizioni differenti nella teoria della relatività ristretta siano equivalenti a causa del fatto che le definizioni dei termini le rendono mere varianti notazionali, ha una debolezza fatale, messa in luce dalla critica di Quine della distinzione analitico-sintetico. Tale idea dipende in modo cruciale dall'ipotesi che alcune asserzioni delle teorie fisiche siano delle «definizioni»; si può formulare una nozione di equivalenza che tenga conto di ciò senza assumere la distinzione analitico-sintetico o, almeno, senza assumere che tale distinzione si applichi entro le teorie scientifiche? Per fare questo, s'impieghi ora un po' di tecnica logica.

Nella logica moderna, un concetto molto importante è quello di «interpretazione relativa» di una teoria in un'altra. Per esempio, se si vuol mostrare che una teoria è indecidibile, un metodo privilegiato è mostrare che una teoria che si sa già essere «essenzialmente indecidibile» (cioè non avere estensioni decidibili) è relativamente interpretabile nella teoria in questione. Segue allora che anche questa è indecidibile, e in realtà essenzialmente indecidibile.

La definizione di «T_1 è relativamente interpretabile in T_2» è: esistono definizioni possibili (cioè definizioni formalmente possibili, sia che corrispondano al significato dei termini sia che non vi corrispondano) dei termini di T_1 nel linguaggio di T_2 con la proprietà che, se si «traducono» le asserzioni di T_1 nel linguaggio di T_2 mediante queste definizioni, allora tutti i teoremi di T_1 diventano teoremi di T_2.

Due teorie sono mutuamente relativamente interpretabili se ciascuna è relativamente interpretabile nell'altra, nel senso appena detto. È la mutua interpretabilità relativa la nozione di equivalenza che si sta cercando?

È facile vedere che la risposta è no. L'interpretabilità relativa è una relazione puramente formale: non fa intervenire in alcun modo il significato dei termini di T_1 e T_2. In realtà, si applica alle teorie T_1 e T_2 viste come calcoli non interpretati. Cosí la mutua interpretabilità relativa, benché interessante come relazione formale, non garantisce alcun tipo d'identità di significato o anche di soggetto trattato fra teorie; testimonia solo l'esistenza di strutture formali simili. È plausibile che due teorie su soggetti completamente disparati (ad esempio un sistema assiomatico di genetica e un sistema assiomatico di teoria dei numeri) possano risultare relativamente interpretabili, ma difficilmente potrebbero essere equivalenti come significato conoscitivo.

Si supponga di cercare di combinare la richiesta formale che le due teorie in questione siano relativamente interpretabili, con un'appropriata richiesta informale (poiché definizioni puramente formali del concetto di equivalenza non sembrano prossime). È possibile forse arrivare in questo modo alla chiarificazione che si sta cercando?

A me sembra di sí. La nozione informale che propongo di usare è la nozione di *spiegazione* (concedendo che i tentativi di formalizzare tale nozione non siano piú soddisfacenti dei tentativi di formalizzare la nozione di equivalenza, c'è comunque un considerevole accordo nei giudizi degli scienziati su ciò che è o non è una spiegazione).

Questa è la proposta: una teoria è «completa» se ogni asserzione della teoria è decidibile, cioè provabile o refutabile, nella teoria. Si supponga che T_1 e T_2 siano teorie complete mutuamente relativamente interpretabili (ci si limita alla considerazione di teorie complete, perché quando si chiamano «equivalenti» delle descrizioni, in genere si ha in mente una relazione tra completamenti ideali di tali descrizioni, e non soltanto tra i frammenti finiti che si considerano in realtà), e inoltre che le «traduzioni» di ciascuna nell'altra conservino la relazione di spiegazione, e che entrambe spieghino gli stessi fenomeni (questo è l'elemento informale cui si alludeva). Allora (questa è la proposta) le due teorie sono descrizioni equivalenti.

Ma come si può dire che gli stessi fenomeni sono spiegati dalle due teorie, senza già sapere che le due teorie sono equivalenti? Si considerino due descrizioni nella relatività ristretta, ad esempio le descrizioni (A) e (B). Volendo prendere come «fenomeni» da spiegare eventi quali collisioni, coincidenze di eventi quali una collisione e l'arrivo di un raggio di luce, emissione e assorbimento di particelle e radiazioni, allora è innegabile che le descrizioni (A) e (B) offrono spiegazioni di tutti *questi* fenomeni, e che le spiegazioni sono traduzioni l'una dell'altra. In generale, se si accetta l'analisi dell'equivalenza proposta, ci sarà sempre un elemento di scelta nella decisione di accettare due teorie come equivalenti: la scelta del dominio di eventi da considerare come «fenomeni».

In base all'analisi dell'equivalenza qui proposta, si può dire che le descrizioni (A) e (B) dell'esempio siano equivalenti, e si può parlare di traduzioni tra le descrizioni (A) e (B), senza assumere che qualche particolare asserzione sia la «definizione» del termine 'simultaneo' in ciascuna descrizione, e senza assumere qualche distinzione tra asserzioni «analitiche» e «sintetiche» in ciascuna descrizione.

Per prendere un altro caso dalla fisica moderna, è noto che la meccanica delle matrici di Heisenberg e la meccanica ondulatoria di Schrödinger furono sviluppate indipendentemente, e che i fisici considerarono questi due sistemi equivalenti nel senso qui spiegato quando scoprirono una corrispondenza matematica fra i due formalismi. Se si considerano i «fenomeni da spiegare» in questo caso come eventi di diffusione (assorbimento ed emissione di particelle), allora ciò è in perfetto accordo con la spiegazione proposta. E, ancora una volta, tentare di provare l'equivalenza cercando «definizioni» dei termini cruciali sarebbe molto difficile, se non impossibile. Chi può dire quale asserzione di teoria fisica è la «definizione» della funzione ψ? Dopo aver accettato l'equivalenza si possono sempre, naturalmente, costruire definizioni che rendano le teorie in questione varianti notazionali; ma dire che sono equivalenti *perché* sono varianti notazionali è mettere il carro davanti ai buoi.

Ma perché richiedere anche la mutua interpretabilità relativa per l'equivalenza di teorie complete? Perché non richiedere soltanto che esse spieghino esattamente gli stessi fenomeni (e che le predizioni di entrambe le teorie siano empiricamente corrette)? Perché far questo sacrificherebbe una distinzione importante: quella tra il caso dell'*equivalenza*, in cui ci si aspetta, o cosí ci sembra, che qualche genere di traduzione o relazione di riduzione valga tra le spiegazioni fornite dalle diverse teorie, e il caso del dualismo radicale. Se il dualismo (o, piú in generale, il pluralismo) risultasse vero, allora ci si aspetterebbe di avere teorie del mondo che spiegano gli stessi fenomeni (almeno se si considerano gli eventi osservabili come fenomeni da spiegare), ma che non sono in alcun modo riducibili o «traducibili» l'una nell'altra. Questo scuoterebbe fortemente la nostra fede nel realismo empirico mentre, cosí sembra, l'esistenza di descrizioni equivalenti che possono essere ridotte l'una all'altra non contrasta piú con tale fede; a questo punto il realismo empirico è diventato piú di una semplice teoria della conoscenza che sia «copia del mondo». (Una distinzione simile fra la relazione che si è chiamata equivalenza, e che Quine chiama «essere due *versioni* della stessa teoria», e il caso del dualismo radicale, è stata di recente trattata da Quine [1975]).

10. *Il problema della convenzionalità semantica banale.*

Si supponga di immaginare che l'intero corpo delle nostre credenze sia stato ricostruito razionalmente e formalizzato, e sia T_1 la teoria che ne risulta. S'immagini poi di decidere di cambiare il significato di un termine di T_1, ad esempio 'pressione'. In particolare, si supponga di decidere di usare la parola 'pressione' per significare ciò che ora s'intende con 'radice cubica della pres-

sione'. Questo porterebbe a dover riscrivere T_1, ad esempio, come T_2. T_1 e T_2 sarebbero allora «descrizioni equivalenti» secondo *ogni* criterio. L'esistenza di *questo* genere di equivalenza non è, naturalmente, niente di nuovo. Tutto ciò che l'esistenza di coppie di teorie come T_1 e T_2 mostra è che al semplice termine «pressione» potrebbe essere stato assegnato, invece del significato che ha, quello che nel linguaggio attuale ha l'espressione «radice cubica della pressione». Piú in generale, mostra ciò che è stata chiamata convenzionalità semantica banale: il fatto che i termini impiegati come parole significanti potrebbero aver ricevuto significati diversi da quelli che hanno ricevuto in realtà.

L'importanza del fenomeno dell'equivalenza conoscitiva di teorie che sembrano diverse o addirittura incompatibili è che esso *non* è, nella scienza attuale, soltanto una questione di convenzionalità semantica banale. Per esempio, le persone nel sistema B della navicella spaziale dell'esempio proposto, usano il termine «simultaneo» in un modo che è tanto in accordo con le convenzioni dell'italiano (o dell'inglese, o di qualunque linguaggio) quanto quello delle persone nel sistema della Terra. In realtà, esse lo usano in un modo che deve sembrar loro, se non conoscono la teoria della relatività ristretta, «lo stesso». Che ci sia una relatività nascosta per le attribuzioni di simultaneità – che, se, ad esempio, facciamo conto che orologi trasportati a distanza restino «sincronizzati», quali eventi risulteranno «simultanei» dipenderà dal fatto che gli orologi siano, o no, trasportati alla stessa velocità rispetto al sistema in quiete – è una questione di fatti *empirici* finora sconosciuti. L'equivalenza ha importanza filosofica proprio in casi come questi, in cui non sembra che si sia *alterato* il significato ordinario di alcuna espressione, eppure, per motivi contingenti, teorie apparentemente incompatibili risultano equivalenti nel senso spiegato.

Trascurare la necessità di distinguere tipi banali di descrizioni equivalenti che nascono dalla convenzionalità semantica banale da coppie significanti di descrizioni equivalenti ha portato a strane teorie nella filosofia della scienza. Per esempio è stato sostenuto, prima da Reichenbach e piú recentemente da Adolf Grünbaum [1970], che il fatto che si potrebbero usare metriche non-standard per lo spazio ed anche per lo spazio-tempo prova che la scelta di una metrica è questione di «convenzione» (Reichenbach) e che lo spazio e lo spazio-tempo sono «intrinsecamente metricamente amorfi» (Grünbaum). Ma di per sé la rimetrizzabilità o la metrizzabilità alternativa provano solo l'esistenza di una convenzionalità semantica banale. Per stabilire la convenzionalità dell'intera metrica della relatività generale si deve usare un argomento migliore che non la possibilità formale di usare la semplice espressione «distanza spazio-temporale» per riferirci a grandezze differenti da quelle usate (Grünbaum ha tentato di trovare argomenti del genere, ma nessuno di essi pare soddisfacente).

11. *Equivalenza e realismo.*

A prima vista l'esistenza di descrizioni equivalenti non sembra minacciare in alcun modo il realismo. Nella teoria della relatività ristretta, per esempio, se si è preoccupati dall'esistenza di descrizioni di fenomeni apparentemente incompatibili ma equivalenti, si possono completamente evitare termini quali 'simultaneo' e 'distanza', ed usare il linguaggio degli invarianti. Per esempio, invece di parlare di «separazione temporale» e «distanza spaziale» tra due eventi, si può dare la loro distanza spazio-temporale. Una tale descrizione in termini di nozioni invarianti è certamente completa, poiché ciascuna delle descrizioni relative ai sistemi si può ricavare da essa quando siano date le coordinate del sistema. (Naturalmente, la decisione di considerare la descrizione invariante come una descrizione completa è collegata con la scelta di considerare collisioni, coincidenze, simultaneità in un luogo, assorbimenti ed emissioni come fenomeni da spiegare; per dirne una, la descrizione invariante *non* spiega quale dei sistemi di coordinate sia «realmente in quiete». In effetti, decidere che quelli detti sono i «fenomeni da spiegare», e decidere che la descrizione invariante è una descrizione completa di ciò che succede, sono due maniere di esprimere una stessa decisione, quella di non considerare la *simultaneità a distanza* come un fenomeno reale e obiettivo). La matematica degli invarianti, cioè il calcolo tensoriale, è stata in effetti quella usata da Einstein per sviluppare la teoria della relatività generale.

Se un realista accetta la descrizione invariante come la vera rappresentazione di ciò che accade, l'esistenza di descrizioni relative a sistemi di riferimento non è un problema per lui piú del fatto che la superficie del mondo possa essere rappresentata in modi diversi, come la proiezione di Mercatore o la proiezione polare. Egli dirà che è *la natura dell'oggetto stesso* che spiega perché esso ammetta queste diverse rappresentazioni.

Ma in genere le cose non sono cosí semplici. Si considerino le due seguenti teorie sullo spazio-tempo (per semplicità viene ignorata la meccanica quantistica):

Teoria 1: lo spazio-tempo consiste di oggetti detti punti (eventi). Essi non hanno estensione, e lo spazio-tempo consiste di tali punti, proprio come nella geometria euclidea classica linee, piani e corpi solidi consistono di punti spaziali senza estensione.

Teoria 2: lo spazio-tempo consiste di intorni spazio-temporali estesi, tutte le parti dello spazio hanno estensione. Questo corrisponde alla teoria (proposta da Whitehead) secondo cui lo spazio euclideo classico consiste di intorni spaziali estesi. Secondo Whitehead, i «punti» sono semplicemente costruzioni logiche e non oggetti spaziali reali: un punto è (identificato con) un insieme convergente di sfere solide (cioè sfere coi loro interni).

Se si considerano come fenomeni i «fenomeni osservabili» o anche l'insieme dei fenomeni con dimensioni fisiche, osservabili o no, allora le teorie 1 e 2 sono descrizioni equivalenti, secondo il criterio adottato; infatti, assumendo che le particelle abbiano estensione finita (che non ci siano cioè nel mondo reale dei punti con massa o carica), le cause di ogni fenomeno devono avere estensione. Non può fare differenza, per una spiegazione fisica, che si trattino i punti spazio-temporali come «reali» oppure come mere costruzioni logiche.

Un realista rigido potrebbe sostenere che c'è una realtà delle cose per cui è vera la teoria 1 o la teoria 2. Ma un realista scientifico (contrapposto a un realista del vecchio tipo, metafisico) difficilmente lo farebbe, per una serie di motivi. Da un lato, si rinunzierebbe alla scoperta di cui parla questo articolo, che esistono cioè versioni incompatibili ma equivalenti del mondo. D'altro lato si arriverebbe o allo scetticismo o a un risveglio di quel tipo di metafisica che Kant ci ha convinto ad abbandonare. Allo scetticismo se si dicesse che c'è una realtà delle cose secondo cui una delle teorie è vera, ma che non si può mai *conoscere* tale realtà (e se poi *si vuole* essere scettici, com'è possibile essere sicuri che *c'è* una «realtà delle cose»?) Alla metafisica deteriore – quel genere che asserisce l'esistenza a priori di realtà noumeniche – se si afferma di sapere su basi extrascientifiche quale delle due teorie è vera. Per questo genere di motivi un realista scientifico ammette che le teorie 1 e 2 sono descrizioni equivalenti. In effetti egli riconosce che gli intorni estesi sono un adeguato sistema di «invarianti», e quindi una descrizione del mondo che dica cosa succede in ciascun intorno esteso è una descrizione *completa*.

Se, ancora una volta, si sta trattando di differenti rappresentazioni di un mondo «invariante», dev'essere possibile che quelli che si indicano come termini «incompatibili» possano corrispondere alla stessa entità reale, benché non, ovviamente, entro la stessa teoria. Cosí, se si vuol salvare la posizione realista tradizionale secondo cui le teorie sono solo rappresentazioni di entità che non dipendono dalle teorie, bisogna dire che gli oggetti reali indicati come «punti» in una teoria possono essere indicati come «insiemi di sfere convergenti» in un'altra. E, ancora una volta, bisogna dire che è la natura del mondo stesso a spiegare perché esso ammette queste rappresentazioni diverse.

Un problema per questa affermazione è che in generale ci sarà piú di una sola interpretazione relativa possibile di una descrizione equivalente in un'altra. La teoria 1 può essere interpretata nella teoria 2 in *molti* modi diversi: i «punti» possono essere insiemi di sfere con raggi uguali a potenze negative di 2, ad esempio, o insiemi di sfere con raggi uguali a potenze negative di 3. Cosí se termini come 'punti' e 'insiemi di sfere convergenti' sono le «immagini» di «oggetti reali» (oggetti indipendenti dalle teorie), allora ancora una volta bisogna fronteggiare l'alternativa fra lo scetticismo (se si dice che non è possibile sapere se la traduzione «corretta» della teoria 1 nella teoria 2 è quella che fa corrispondere i punti con insiemi di sfere convergenti ed i cui raggi sono potenze negative di 2, o qualche altra) e la metafisica trascendentale (se si afferma la conoscenza a priori di qual è *la* traduzione corretta).

Ancora una volta, la mossa preferita dai realisti scientifici è negare che ci sia una verità in questo campo. Un moderno realista direbbe che *ognuna* di queste traduzioni è corretta. Ma allora, sembra, bisogna completamente eliminare l'idea che i termini delle nostre teorie siano «immagini» di «oggetti reali» (oggetti noumenici); perché come potrebbe *non* esserci una verità riguardo a quali termini in due teorie differenti sono immagini dello stesso oggetto, se realmente i termini sono immagini di oggetti? S'incomincia a pensare che Kant avesse ragione, e che la scienza dia soltanto *relazioni* fra gli oggetti

e non gli oggetti stessi, se pure si vuole ancora continuare a parlare di «oggetti indipendenti dalle teorie».

Ma è difficile continuare a parlare di «oggetti indipendenti dalle teorie»: il problema è che cosí si può sí mantenere «il mondo», ma al prezzo di eliminare ogni nozione comprensibile di *ciò* che il mondo è. Ogni asserzione che cambi il suo valore di verità nel passaggio da una teoria corretta a un'altra teoria corretta – una descrizione equivalente – esprimerà soltanto una proprietà del mondo *relativa alle teorie*. E piú asserzioni del genere ci sono, piú proprietà del mondo risultano essere relative alle teorie. Per esempio, se si ammette che le teorie 1 e 2 siano descrizioni equivalenti, allora la proprietà di *essere un oggetto* (contrapposto a una classe o insieme di cose) sarà relativa alle teorie.

Tutto ciò non è peculiare al mio semplice esempio: la teoria fisica attuale abbonda di esempi simili. Si possono interpretare i punti spazio-temporali come oggetti, o come eventi, o come proprietà; si possono interpretare i campi come oggetti o valersi solo di particelle che interagiscono a distanza (nella fisica classica, ad ogni buon conto). Il fatto è che cosí tante proprietà del «mondo» – partendo proprio da quelle categoriali come cardinalità, particolari o universali, ecc. – risultano essere «relative alle teorie», che «il mondo» scompare come *mera* «cosa in sé». Se non si può dire *come* il mondo è, indipendentemente dalle teorie, allora parlare delle teorie come di descrizioni del «mondo» non ha senso.

A questo punto la discussione ha percorso una specie di spirale hegeliana. Dapprima i verificazionisti hanno introdotto la nozione di descrizione equivalente e hanno cercato di esplicarla. Poi i realisti scientifici l'hanno adottato (e in questo articolo si è data una spiegazione in quest'ottica). Ma ora sembra che l'accettazione dell'esistenza di descrizioni equivalenti, e quindi di *versioni corrette ed incompatibili del mondo*, abbia minato la metafisica su cui il realismo – compreso quello scientifico – si basava in origine. Oggi le dispute sullo scontro metafisico del realismo contro il relativismo concettuale, sulla distinzione tra realismo empirico e metafisico, e sulla «semantica realista» contrapposta alla «semantica non-realista» quali teorie della verità sono vive e vegete. Benché una soluzione definitiva non sia ancora in vista, non c'è dubbio che il fenomeno delle descrizioni equivalenti è profondamente significativo per la discussione di questi problemi. [H. P.].

Ayer, A.
1946 *Language, Truth and Logic*, Gollancz, London 1946².

Carnap, R.
1928 *Scheinprobleme in der Philosophie: Das Fremdpsychische und der Realismusstreit*, Weltkreis Verlag, Berlin-Schlachtensee; ora in *Der logische Aufbau der Welt*, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1961² (trad. it. Fabbri, Milano 1966).

Grünbaum, A.
1970 *Space, Time and Falsifiability, Part I*, in «Philosophy of Science», XXXVII, pp. 469-588.

Lenin, V. I.
1909 *Materializm i empiriokriticizm*, Zveno, Moskva (trad. it. Editori Riuniti, Roma 1970).

Quine, W. van Orman
1951 *Two Dogmas of Empiricism*, in «Philosophical Review», LX, pp. 20-43; ora in *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge Mass. 1961² (trad. it. Astrolabio, Roma 1966).
1975 *On empirically equivalent systems of the World*, in «Erkenntnis», IX, pp. 313-28.

Reichenbach, H.
1928 *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, De Gruyter, Berlin und Leipzig (trad. ingl. Dover, New York 1957, da cui la trad. it. Feltrinelli, Milano 1977).
1938 *Experience and Prediction*, University of Chicago Press, Chicago.

L'esistenza di teorie (cfr. **teoria**) incompatibili ma vertenti sullo stesso campo fenomenico (cfr. **fenomeno, empiria/esperienza**) e presentanti un identico contenuto cognitivo ha costituito l'oggetto di analisi opposte: da parte dei neopositivisti alla luce dell'idea di verifica (cfr. **verificabilità/falsificabilità**), associata a quella di **probabilità**; da parte delle filosofie realiste (cfr. **metafisica, filosofia/filosofie**), cercando dei criteri (cfr. **induzione/deduzione, deduzione/prova**) di valutazione delle teorie a partire dal **reale** (cfr. **referenza/verità**); e anche da parte di correnti che difendono un'**interpretazione** convenzionalista (cfr. **convenzione, coerenza**) della **scienza**.

In virtú di un'idea informale (cfr. **formalizzazione**) della **spiegazione**, sembra possibile definire dei criteri di **traduzione** fra teorie diverse cosí da trarne i requisiti logici (cfr. **logica**). La **relatività** e la matematica degli invarianti (cfr. **invariante**), la **fisica** dei **quanti** e la distinzione fra analitico e sintetico (cfr. **analisi/sintesi, proposizione e giudizio**) hanno costituito il terreno preferenziale delle controversie sull'equivalenza delle teorie.

Formalizzazione

La connessione tra formalizzazione e algoritmo è il principale argomento in tema di formalizzazione che non viene apprezzato dagli studiosi. Si ammettono le connessioni tra formalizzazione e assiomatizzazione, formalizzazione e sistemi non interpretati, ecc.; ma si trascura la connessione, che è qualcosa di piú di una semplice connessione *storica*, tra formalizzazione e sviluppo dei procedimenti algoritmici (cioè, dei procedimenti «meccanici») per risolvere i problemi.

Questa connessione è già presente nell'opera di Boole, il quale descrisse il suo sistema come un sistema in cui si potevano risolvere i problemi logici operando solamente sui simboli, senza fare riferimento nel corso dell'operazione a ciò che si supponeva essi significassero. In altre parole, Boole forní un algoritmo per risolvere (una certa classe di) problemi logici.

Sarebbe però errato concludere che oggi la formalizzazione di una teoria significhi fornire un algoritmo per risolvere i problemi di cui la teoria tratta. La nozione di formalizzazione si è estesa e ha subito mutamenti dai tempi di Boole. Ma si vedrà che l'origine della nozione nel contesto della ricerca di soluzioni algoritmiche a problemi logici ha determinato gran parte della sua ulteriore evoluzione.

Qualsiasi algoritmo si usi (si pensi a esempi familiari tratti dalla matematica della scuola secondaria: gli algoritmi per estrarre le radici quadrate, ad esempio; oppure a quelli della scuola primaria: la divisione decimale con molte cifre), qualsiasi algoritmo si usi, ripeto, richiede che i dati dell'algoritmo (ad esempio, i numeri da dividere) siano scritti per esteso in una notazione che segue regole prestabilite, e che ogni passo proceda in modo altrettanto regolato. In questo senso si può dire che *ogni* algoritmo è una «formalizzazione» di *qualche* processo di ragionamento. In particolare, dal momento che tutto ciò che i calcolatori possono fare è eseguire algoritmi, è facile comprendere perché i calcolatori richiedono linguaggi formalizzati: ogni programma per calcolatori atto a risolvere un problema formulato originariamente nel linguaggio ordinario è una *formalizzazione* del problema e di certi processi di ragionamento usati per risolverlo. (In particolare, i linguaggi formalizzati per la logica furono assolutamente indispensabili allo sviluppo del software dei calcolatori).

Una volta che sia stato inventato un linguaggio sottoposto a regole – un linguaggio con una sintassi assolutamente regolare e invariabile, in cui ogni segno possiede una e una sola funzione; un linguaggio tipo quello che possono usare i calcolatori – allo scopo di rappresentare una certa classe di problemi e di risolvere tali problemi eseguendo calcoli algoritmici, può accadere che ci s'interessi del *potere espressivo* del linguaggio sottoposto a regole prescindendo completamente dai casi in cui ciò che è espresso può servire come parte di un algoritmo. Ad esempio, i linguaggi formalizzati per la logica furono dapprima sviluppati in connessione con l'algebra di Boole e le relative parti della logica. Queste ultime

sono *decidibili*, e i primi sviluppi conversero ampiamente nel fornire procedure di decisione – vale a dire, algoritmi per risolvere i problemi logici esprimibili in quella notazione. Ma ci si rese poi conto che questi linguaggi formalizzati erano troppo deboli per schematizzare certi ragionamenti validi. Per esempio, l'argomentazione:

Tutti i cavalli sono animali
(dunque) Tutte le teste di cavalli sono teste di animali

non può essere schematizzata finché non si possiede un simbolismo per la logica delle *relazioni*. '*x* è la testa di *y*' è un predicato *relazionale*: se lo si scompone in semplici predicazioni monadiche, ad esempio '*x* è una testa e *y* è un animale', si trascura il fatto che *x appartiene* a *y*, ed è proprio questo che costituisce l'elemento *relazionale* da cui dipende la validità dell'inferenza.

Non fu difficile rimediare a questo difetto della notazione booleana: ma una volta ottenuti linguaggi abbastanza ricchi per esprimere tanto le relazioni quanto la *generalità multipla* (cfr. oltre), linguaggi abbastanza ricchi per distinguere fra 'Ognuno ama qualcuno' e 'Qualcuno ama ognuno', accade qualcosa d'interessante. Si è partiti da un linguaggio sottoposto a regole (un «linguaggio formalizzato»), il linguaggio della logica booleana. Si è arricchito questo linguaggio con l'aggiunta di quantificatori e di relazioni. Il nuovo linguaggio, descritto usualmente come il linguaggio della logica del primo ordine, è altrettanto sottoposto a regole e formalizzato quanto il linguaggio da cui si è partiti. La sua sintassi è altrettanto regolare, ogni segno ha una sola funzione determinata, ecc. Ma la logica di Boole è *decidibile* e la logica del primo ordine è *indecidibile*. Non esiste in linea di principio alcun algoritmo per determinare la validità o la non-validità di uno schema arbitrario della logica del primo ordine. In breve: si è partiti da un linguaggio formalizzato, il simbolismo booleano che era strettamente connesso con un algoritmo di decisione; si è ampliato il linguaggio allo scopo di ottenere un maggior potere espressivo e ci si è imbattuti in qualcosa d'inatteso: un linguaggio, sottoposto a regole, per schematizzare le forme delle argomentazioni deduttive, che non possiede un algoritmo di decisione! Fu questa catena di eventi che condusse, storicamente, all'ampliamento della nozione di formalizzazione oltre i casi in cui il ragionamento formalizzante è fatto in modo da fornire un algoritmo capace di un'esecuzione meccanica. (Forse questa catena di eventi spiega anche perché 'formalizzazione' sembra avere differenti significati per differenti studiosi).

1. *La logica del primo ordine e la «deduzione naturale».*

Si presupporranno qui il simbolismo della logica del primo ordine e la distinzione tra variabili libere e vincolate (nozioni per le quali si rimanda ad altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*): un'esemplificazione può essere la differenza tra le variabili '*x*' e '*y*' nella formula che simbolizza 'Qualcuno ama *y*', cioè '$(\exists x)Axy$'. In questa formula '*y*' è una variabile libera, a cui si può legittima-

mente sostituire un nome proprio; 'x' è una variabile vincolata, è parte della notazione del quantificatore che prende il posto di un termine del linguaggio comune come 'qualcuno', e non può essere trattata come sostituto di un nome proprio. Un esempio ancora piú complesso è '$Fx \vee Fy \vee (\exists x)Rxy$' (che potrebbe simbolizzare 'x è alla festa o y è alla festa o qualcuno ha fatto ritardare y'). In quest'ultima formula, 'y' è una variabile libera, ma 'x' è variabile libera nella prima occorrenza e vincolata nella seconda. In realtà, la somiglianza tipografica fra l'occorrenza libera della 'x' e quella vincolata non è significativa; la formula suesposta è equivalente a '$Fx \vee Fy \vee (\exists z)Rzy$', in cui in tutte e tre le occorrenze compaiono variabili distinte.

L'uso di variabili vincolate e di quantificatori mette in grado di esprimere la *generalità multipla*: cioè, sequenze di quantificatori come $(x)(\exists y)(z)$ ('Per ogni x c'è qualche y tale che per ogni z'). Già i logici medievali avevano compreso che c'erano problemi nello schematizzare inferenze implicanti una generalità multipla, ma non si rese disponibile una notazione che risolvesse questo problema prima dell'invenzione di una notazione per i quantificatori da parte di Frege e (indipendentemente) da parte di Peirce e dei suoi allievi. Una distinzione coerente tra proposizioni singolari ('Fx', 'x è un uomo') e proposizioni universali ('$(x)(Fx \supset Gx)$' 'Tutti gli uomini sono mortali') risolse uno stato di confusione che era perdurato nella notazione logica dal tempo di Aristotele. L'uso di indici per gli individui (come in 'Fx', 'x è un uomo') generalizza in modo naturale il trattare le *relazioni* (come in 'Axy', 'x ama y' o 'x è la testa di y', o qualsiasi altra). Si noti che la logica monadica, la logica del primo ordine senza predicati a due o piú posti, è decidibile, e che anche la logica delle relazioni senza generalità multipla (la logica del primo ordine in cui si richiede che tutti i quantificatori siano universali e reggano l'intera formula) è decidibile. Cosí la generalità multipla di per sé (in assenza di «relazioni», cioè di predicati a due o piú posti) non rende indecidibile la logica del primo ordine, e le relazioni di per sé (in assenza di generalità multipla) non rendono indecidibile la logica del primo ordine; è la combinazione, la presenza simultanea di relazioni *e* di generalità multipla che conduce all'indecidibilità.

In altri articoli di questa stessa *Enciclopedia* si daranno gli assiomi e le regole di un sistema di tipo hilbertiano di logica del primo ordine e si spiegheranno le operazioni di questo sistema mediante una deduzione campione. (Si accennerà anche all'esistenza di un sistema d'altro genere, la cosiddetta «deduzione naturale», e al fatto che è piú facile per la maggioranza delle persone trovare dimostrazioni in questo secondo tipo di sistema). Ora si illustrerà questo sistema (dovuto a Quine [1950]).

Prima di esporre il sistema, bisogna spiegarne l'idea di fondo. L'idea di fondo di qualsiasi sistema di deduzione naturale è quella di formalizzare in qualche modo questa inferenza: nella usuale pratica matematica (o anche nel linguaggio quotidiano) si può mostrare che un condizionale $(A \supset B)$ segue dalle premesse E, F, G, ..., H facendo una *deduzione* di B da E, F, G, ..., H, e A. «Formalizzare» questa inferenza significa costruire un sistema con la proprietà che è possibile esibire una deduzione nel corso di un'altra; in particolare,

si deve essere capaci di esibire una deduzione con premesse E, F, G, ..., H, A e con conclusione B come parte di una deduzione con premesse E, F, G, ..., H e conclusione $(A \supset B)$. Ciò è compiuto in modo alquanto differente in differenti sistemi di deduzione naturale. (L'idea fondamentale di questa deduzione risale a Gentzen). Nel sistema di Quine si usa un accorgimento molto semplice: ogni formula porta un numero di asterischi alla propria sinistra. La prima formula in una deduzione è una premessa e ha un solo asterisco alla propria sinistra. Ogni premessa addizionale ha un asterisco in piú alla propria sinistra. Cosí, un'inferenza con le premesse 'Fx' ('Socrate è un uomo') e '$(x)(Fx \supset Gx)$' ('Tutti gli uomini sono mortali') comincerebbe in questo modo:

(1) * Fx
(2) ** $(x)(Fx \supset Gx)$.

In pratica, quindi, *ogni nuova premessa comincia una nuova colonna di asterischi.* Si consideri ora la seguente deduzione (tra poco saranno enunciate con precisione le regole impiegate):

(1)	*	Fx	
(2)	**	$(x)(Fx \supset Gx)$	
(3)	**	$Fx \supset Gx$	(2) E.U.
(4)	**	Gx	(1), (3) F.V.

In questa deduzione è stato dedotto 'Gx' ('Socrate è mortale') da 'Fx' e '$(x)(Fx \supset Gx)$'. La linea (3) è stata ottenuta dalla linea (2) per Eliminazione dell'Universale: ponendo una 'x' libera per tutte le occorrenze della 'x' vincolata nell'ambito del quantificatore universale '(x)' nella riga (2). Dalla (2) si sarebbe anche potuto inferire '$Fy \supset Gy$', '$Fz \supset Gz$', ecc. per Eliminazione dell'Universale; l'E.U. permette d'inferire B′ da (v)B ogni volta che B′ è simile a B eccetto per il fatto di possedere occorrenze *libere* di qualche variabile w – che può essere v stessa – dove ci sono occorrenze di v nell'ambito del quantificatore (v). La sola restrizione consiste nel fatto che il quantificatore (v) deve reggere l'*intera* formula (v)B. (Sarebbe dunque *fallace* inferire '$Fy \supset Gy$' da '$(x)Fx \supset Gx$' – poiché la seconda formula che in realtà dovrebbe essere scritta $((x)Fx \supset Gx)$, ha un quantificatore universale il cui ambito arriva solo a $\supset$ e non è in realtà della forma (v)B).

Da dove è stata ottenuta la riga (4) nella precedente deduzione? La riga (4) segue dalla (1) e dalla (3) per il calcolo proposizionale, cioè per F.V. (inferenza mediante Funzioni di Verità). Tali inferenze possono essere controllate in modo meccanico con il noto metodo delle tavole di verità (per cui si vedano altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*). Si noti che non ci sono piú asterischi vicino alla (3) e alla (4) di quanti non ve ne siano vicino alla (2): ciò significa che (3) e (4) *non* sono premesse addizionali; ma si asserisce che esse seguono dalle premesse poste alla sommità delle colonne di asterischi che stanno loro vicino. L'accorgimento delle colonne di asterischi mette anche in grado di eliminare una premessa: cioè, d'indicare che ulteriori passaggi in una dimostrazione non di-

pendono da una premessa precedente. Per far ciò s'interrompe semplicemente una colonna di asterischi, come verrà illustrato tra breve. La regola chiave è la regola di introduzione del condizionale: questa regola permette di eliminare l'*ultima* premessa in qualsiasi passo, a patto che si scriva in quel passo il condizionale $A \supset B$ il cui antecedente A è la premessa che viene eliminata e il cui conseguente B è la riga precedente. Un esempio chiarirà la regola.

(1)	*	Fx	
(2)	**	$(x)(Fx \supset Gx)$	
(3)	**	$Fx \supset Gx$	(2) E.U.
(4)	**	Gx	(1), (3) F.V.
(5)	*	$(x)(Fx \supset Gx) \supset Gx$	
(6)		$Fx \supset [(x)(Fx \supset Gx) \supset Gx]$.	

Le prime quattro righe di questa deduzione sono le stesse dell'esempio precedente. Alla riga (5) è stata eliminata la premessa '$(x)(Fx \supset Gx)$' e si è concluso che dalla *sola* premessa 'Fx' ('Socrate è un uomo') segue che $(x)(Fx \supset Gx) \supset$ $\supset Gx$ ('Se tutti gli uomini sono mortali, Socrate è mortale'). In realtà, è stata esibita *l'intera deduzione* (1)-(4) come *parte* della deduzione (1)-(5), e si è concluso (alla riga (5)) che *poiché* la deduzione (1)-(4) mostra che 'Gx' segue da 'Fx' e '$(x)(Fx \supset Gx)$', *allora* '$(x)(Fx \supset Gx) \supset Gx$' segue dal *solo* '$Fx$'. Che la riga (5) non dipenda dalla premessa (2) è opportunamente indicato dal fatto che la colonna di asterischi che inizia con la premessa (2) non si estende sino alla (5).

Analogamente, alla riga (6) è stato asserito che '$Fx \supset [(x)(Fx \supset Gx) \supset Gx]$' è vero, senza dipendere da *nessuna* premessa; cioè, è stato asserito che questa formula è un *teorema di logica*.

Completare questo sistema di logica richiederebbe piú regole, per enunciare le quali non c'è qui lo spazio [per maggiori particolari si rinvia a Quine 1950]; ma si è agevolmente constatato che un tale sistema permette di seguire in modo strettamente parallelo la struttura delle argomentazioni deduttive quali realmente occorrono nei testi matematici o nel linguaggio ordinario.

2. *Il significato della formalizzazione della logica.*

Dopo aver esaminato in breve la formalizzazione della logica, è giusto chiedersi: Che cosa si è ottenuto con tutto ciò? Ora che si è formalizzato la logica del primo ordine, che cosa si può fare, che prima era impossibile?

Una risposta la dà la tesi di Hilbert (cfr. l'articolo «Deduzione/prova» in questa stessa *Enciclopedia*): cioè, la tesi che il sistema della logica del primo ordine, in una qualsiasi delle sue formalizzazioni standard, ricostruisce completamente la nozione intuitiva di *deduzione*. Secondo la tesi di Hilbert, una proposizione A è *deducibile* dalle proposizioni E, F, G, ..., H se e solo se esiste una deduzione (come nel sistema di Deduzione Naturale appena descritto, ad esempio) con premesse E, F, G, ..., H e conclusione A.

Assumendo questa tesi, la novità consiste nel fatto che per la prima volta si è capaci di dare regole di logica sia precise sia esaustive. Ciò che Aristotele non riuscí a portare a compimento, e che anche Boole non raggiunse, è stato finalmente realizzato.

Per difendere questa pretesa, si portano abitualmente due argomenti (come è stato rilevato in «Deduzione/prova»): 1) la logica del primo ordine (in una qualsiasi delle sue formalizzazioni canoniche) è *corretta*, vale a dire, ogni teorema è logicamente valido (cioè, vero in ogni universo non vuoto per ogni interpretazione delle lettere predicative); e 2) la logica del primo ordine è *completa*, vale a dire, ogni formula logicamente valida è un teorema.

La *correttezza* della logica del primo ordine è facile da mostrare. Naturalmente, si devono assumere in un metalinguaggio i principî della logica *classica* per dare la dimostrazione della correttezza. (In altri articoli di questa stessa *Enciclopedia* si discuterà la possibilità di rivedere tali principî). La *completezza* è molto piú difficile da mostrare: fu stabilita da Gödel nel 1930. Da questi due risultati segue che qualsiasi regola di deduzione *addizionale* che si potrebbe proporre sarebbe o *scorretta*, vale a dire condurrebbe a risultati non validi in alcuni casi, o *ridondante*; e ciò costituisce un forte appoggio per la tesi di Hilbert.

Sarebbe però erroneo pensare che la tesi di Hilbert sia realmente molto salda. Il problema non consiste nel fatto che la tesi di Hilbert potrebbe essere confutata da un chiaro controesempio (come la tesi di Church, secondo cui le funzioni calcolabili coincidono con le funzioni ricorsive generali, potrebbe essere confutata da un chiaro esempio di una funzione che può essere calcolata con un procedimento algoritmico senza essere ricorsiva) ma piuttosto nel fatto che esiste un margine d'imprecisione e convenzionalità che circonda l'attuale nozione di «deduzione» piú esteso di quello che circonda la nozione intuitiva di algoritmo. I grandi fondatori della logica moderna, Frege, Peirce, Russell, Whitehead, consideravano tutti la logica di ordine *superiore* come «la logica». Sebbene oggi molti studiosi sostengano che tale logica in realtà dovrebbe essere considerata parte della teoria degli insiemi, e che questa dovrebbe essere considerata parte della matematica e non della logica, i fondatori avevano sicuramente ragione. Si consideri anche una semplice regola d'inferenza della logica del primo ordine, per esempio, 'Da Fx e $(x)(Fx \supset Gx)$ si inferisce Gx'. Se si dice che questa regola è *valida*, allora ciò che s'intende dire è che essa vale per *tutti* gli insiemi F, G, e per *tutti* gli individui x. In altre parole, si intende asserire

$$(F)(G)(x)\,[(Fx \;\&\; (x)(Fx \supset Gx)) \supset Gx]$$

e questa è una proposizione del *secondo ordine* (a causa dei quantificatori (F)(G), su «predicati» o «insiemi»). Sostenere che la logica del secondo ordine non è logica, costringerebbe a sostenere che, sebbene il *formalismo sintattico* della logica del primo ordine sia «logica», qualsiasi discussione sulla sua *validità* è «matematica» e non «logica». D'altra parte, qualcuno potrebbe ribattere che non *tutta* la logica del secondo ordine è logica; ad esempio, potrebbe affermare che le formule che hanno quantificatori *esistenziali* contenenti lettere predicative

sono matematica e non logica. Ma sembra meglio dire, come fece lo stesso Russell, che a partire dalla riduzione dell'aritmetica alla logica di ordine superiore la demarcazione tra «logica» e «matematica» è divenuta irrimediabilmente molto vaga.

Si potrebbe tentare di salvaguardare la tesi di Hilbert da questa vaghezza sostenendo che tale tesi afferma che la logica del primo ordine formalizza la nozione intuitiva di deduzione, non la nozione intuitiva di logica. La regola di deduzione appena citata – 'Da Fx e $(x)(Fx \supset Gx)$ si inferisce Gx' – è una regola del primo ordine; soltanto l'asserto sulla *validità* della regola richiede quantificatori predicativi o qualcosa di equivalente. Ma anche interpretata in questo modo, la tesi hilbertiana pone dei problemi.

Prima di tutto, affinché la tesi sia almeno plausibile, si deve ampliare la logica del primo ordine includendo il segno di identità, '$=$', tra le costanti logiche. Anche gli assiomi '$(x)(x=x)$', '$(x)(y)(x=y \supset y=x)$', '$(x)(y)(z)\,[(x=y \;\&\; y=z) \supset x=z]$', e la regola «Sostituire uguali ad uguali» – formalmente, 'Se B' è come B eccetto che ha libera v' mentre B ha libera v, si inferisce $B' \equiv B$ da $v=v'$' – o qualcosa di simile, devono essere aggiunti agli assiomi e alle regole della logica del primo ordine cosí come sono stati presentati finora. (Cosí ampliato il sistema si chiama «logica del primo ordine con identità»). Ma nella logica del secondo ordine non è *necessario* procedere in questo modo; nella logica del secondo ordine si può definire l'identità considerando che '$x=y$' sia un'abbreviazione di '$(F)(Fx \equiv Fy)$'. (Questo è ciò che assume la «legge di Leibniz»: x, y sono *identici* se hanno *tutti* i loro predicati in comune). Perché qualcuno che accetta questa definizione di '$=$' non dovrebbe considerare «la logica del primo ordine con identità» come un frammento dissimulato di logica del secondo ordine?

Far questo potrebbe costituire invero una critica non molto forte alla tesi di Hilbert; dopo tutto, '$A=A$' è *sempre* stata considerata come una legge logica, mentre la «legge di Leibniz» viene generalmente intesa come un assunto *metafisico*; ma se si concede che *una sola* nozione che ha una definizione al secondo ordine venga aggiunta alla logica del primo ordine, allora perché non aggiungerne altre? Perché, ad esempio, non ampliare la logica del primo ordine aggiungendo il quantificatore 'Ci sono infiniti x tali che'? Se si facesse questo, ci sarebbero allora regole addizionali di *deduzione* che possono essere espresse ma che non sono derivabili nel sistema standard. E non c'è limite alcuno al numero di possibili ampliamenti del genere.

Sembra che la ragione *reale* per cui si è tentati di *definire* la deduzione come «deduzione al primo ordine», e di far divenire vera la tesi di Hilbert con un decreto arbitrario, per cosí dire, sia data semplicemente dal fatto che la logica del primo ordine *è* completa, mentre quella del secondo ordine (o anche la logica del primo ordine con l'aggiunta del quantificatore 'Ci sono *infiniti* x tali che') è in linea di principio incapace di formalizzazione completa. Quando un corpo di dottrine logiche risulta non ammettere una formalizzazione completa, c'è qualche ragione allora di trattare qualunque cosa si usi di quella dottrina in un contesto dato come una «premessa aggiunta» e di considerare le dottrine della logica del primo ordine, che *sono* completamente formalizzate, come le «regole di deduzione». Ma è chiaro che non si può attribuire a questo fatto un grande significato filosofico o fondazionale. Formalizzando la logica del primo ordine, si è formalizzata una *parte* della logica; non esiste alcun senso reale in cui si sia formalizzata *tutta* la logica (o, con diversa sottolineatura, tutta la *logica*), in cui si sia formalizzata tutta la *deduzione*, a meno che non si desideri fare una stipulazione alquanto arbitraria circa l'uso futuro del *rumore* «deduzione».

Un esempio dell'artificiosità della nozione di deduzione quando venga ristretta alla deduzione al primo ordine è dato dal problema della formalizzazione dell'*aritmetica*. Uno degli assiomi dell'aritmetica, il principio d'induzione matematica, è un principio che si formula al *secondo ordine*. Ovviamente, se gli *assunti* stessi di una teoria implicano nozioni al secondo ordine, allora le regole di deduzione dovranno essere anch'esse al secondo ordine.

Scorrendo la letteratura sull'argomento ci s'imbatte in due classiche risposte a questa obiezione, a mio parere entrambe insoddisfacenti. Una consiste nello scrivere l'assioma dell'induzione nella notazione della teoria degli insiemi (cioè, dire «Ogni *insieme* che contiene zero ed è chiuso rispetto all'operazione di successore contiene ogni numero intero (positivo)») piuttosto che quantificare le variabili predicative come fece Frege. In tal caso si considera tutta la teoria degli insiemi come costituente premesse addizionali; in realtà, l'intera idea di una teoria dei numeri come una disciplina matematica *separata* viene abbandonata.

Alternativamente, si sostituisce il principio d'induzione formulato al secondo ordine con un insieme infinito di assiomi al primo ordine, cioè con tutte le formule al primo ordine (formulate nel linguaggio del primo ordine con '0', '1', '+', e '·' (per) come soli termini primitivi extralogici) della forma:

$$(1) \qquad [F(0) \;\&\; (x)(F(x) \supset F(x+1))] \supset (x)F(x).$$

Questa teoria (chiamata dai logici «teoria dei numeri al primo ordine») è un buon sistema formale per eseguire quelle che i matematici chiamano dimostrazioni «elementari» nella teoria dei numeri. Ma l'insieme infinito di formule del primo ordine della forma (1) esprime solo una parte del contenuto del principio d'induzione al secondo ordine. Alcuni filosofi risponderebbero: «E con questo? Sappiamo che il contenuto completo del principio d'induzione al secondo ordine non può essere catturato da *nessun* sistema formale», riferendosi al celebre teorema d'incompletezza di Gödel, una conseguenza del quale è quella per cui nessun sistema formale della teoria dei numeri può avere come teorema *tutte* le verità del primo ordine sui numeri naturali. Ma il fatto che nessuna formalizzazione può «catturare il contenuto» di un enunciato in *questo* senso difficilmente costituisce una ragione per adottare una notazione in cui l'enunciato non può nemmeno venir *scritto*. Fatto sta che la formalizzazione (o parziale formalizzazione) piú perspicua della teoria dei numeri resta la breve lista degli assiomi di Peano con il principio d'induzione espresso come una formula del secondo ordine. Considerare la logica del secondo ordine (in una qualsiasi formalizzazione standard, escluso l'assioma della scelta) come un sistema di *regole di deduzione* per derivare conseguenze da premesse come gli assiomi di Peano piut-

tosto che come *premesse* addizionali, è in accordo, a mio avviso, con le intuizioni che qui sono state discusse. Ma la tesi di Hilbert preclude proprio questo modo di vedere la situazione.

3. *Che cosa si è imparato formalizzando la logica?*

Sono stati descritti alcuni dei risultati della formalizzazione della logica. Sebbene l'insieme dei teoremi della logica del primo ordine non sia un insieme decidibile (teorema di Church), esso costituisce ciò che viene chiamato un insieme *ricorsivamente enumerabile*. Ciò vuol dire che una macchina può essere programmata in modo da elencare tutti i teoremi della logica in un elenco senza fine. Se una formula è un teorema, prima o poi apparirà sull'elenco che la macchina «stampa». Ma non c'è nessun algoritmo che dica se una formula arbitraria apparirà o non apparirà prima o poi sull'elenco. (Un altro modo per spiegare cosa ciò significa è questo: si può costruire una macchina tale che, se viene immessa una formula come input, si arresterà prima o poi se la formula è un teorema, e continuerà a funzionare senza arrestarsi altrimenti. La non-esistenza di un algoritmo di decisione per la logica del primo ordine significa che il «problema dell'arresto» per una tale macchina – il problema di dare un algoritmo che dica se la macchina si arresterà o no con un input arbitrario – è insolubile). Dal momento che, come si è accennato, l'insieme dei teoremi (formule derivabili formalmente) è identico all'insieme delle formule che sono *valide* (vere in ogni universo secondo ogni interpretazione delle lettere predicative e delle variabili libere), per il teorema di completezza di Gödel si può concludere che *il problema della decisione per la validità è insolubile* nella logica del primo ordine, e che *l'insieme delle formule valide è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo (decidibile)* nella logica del primo ordine.

Queste ultime asserzioni non fanno menzione della proprietà «sintattica» di essere un teorema (derivabilità formale), ma solo della proprietà «semantica» di essere *valido*; in effetti è possibile dimostrarle senza impiegare una formalizzazione completa della logica del primo ordine, cioè, un insieme di assiomi e di regole di dimostrazione. Ma qualsiasi dimostrazione di queste osservazioni richiede che la nozione «formula valida della logica del primo ordine» sia resa precisa, e fare solo questo già richiede che il *linguaggio* della logica del primo ordine sia specificato in modo completo e rigoroso e che la nozione di *interpretazione* di una formula sia resa precisa (usando nozioni della teoria degl'insiemi). In breve: proprio il «formalizzare il linguaggio» della logica del primo ordine – rendendolo preciso e «sottoposto a regole» – mette in grado di chiarire l'importante nozione di *validità* e di determinare l'ambito della possibilità di trattare con algoritmi le formule valide: permette, cioè, di mostrare che c'è un algoritmo per *elencarle*, ma non un algoritmo di *decisione*. Dando in modo formale e rigoroso un insieme adeguato di assiomi e/o regole d'inferenza per la logica del primo ordine si è in grado di rendere precisa l'idea informale di *deduzione* in logica e di mostrare che ogni formula valida è un teorema (ad esempio, l'ultima

linea priva di asterisco di una deduzione corretta nel sistema descritto sopra). Infine, dal momento che è risultato che la nozione intuitiva di formula *logicamente dimostrabile* («teorema») è coestensiva con la nozione di formula *valida*, si è avuto successo anche nel determinare il grado della possibilità di trattare mediante algoritmo le formule logicamente dimostrabili: c'è un algoritmo per elencare tutte le formule logicamente dimostrabili (anzi, tutte le *dimostrazioni*, se si preferisce), ma non un algoritmo di decisione per la dimostrabilità formale.

4. *Assiomatizzazione e formalizzazione.*

La tendenza alla formalizzazione si connette strettamente con un'altra tendenza di grande importanza: la tendenza all'*assiomatizzazione* della matematica. L'assiomatizzazione non richiede, a rigore, la piena formalizzazione o anche la completa subordinazione a regole del nostro linguaggio: gli assiomi di Euclide per la geometria precedettero di oltre duemila anni sia la formalizzazione completa sia le regole di deduzione e lo sviluppo dei linguaggi formalizzati. Si possono scrivere insiemi di assiomi in un linguaggio naturale, dopo tutto, e molti lo hanno fatto molto tempo prima che i linguaggi rigorosamente formalizzati fossero inventati (e ancora lo fanno qualche volta). E in qualche misura la ricerca degli algoritmi ha persino impedito la ricerca degli assiomi: non è stata assiomatizzata l'*aritmetica* fino a tutto il secolo XIX proprio perché ci si accontentava di considerarla una collezione di algoritmi per risolvere i problemi numerici piuttosto che come un corpo sistematico di postulati e di conseguenze logiche di postulati. E l'algebra presso gli Arabi e nel primo periodo moderno era ancora in gran parte una collezione di algoritmi e di tecniche per risolvere problemi. Ma con la straordinaria crescita della matematica nel XVIII e nel XIX secolo cominciò a nascere l'interesse sui fondamenti; e una delle forme assunte da questo interesse fu il tentativo di scrivere gli assiomi per i vari settori della matematica. Questi assiomi furono dapprima formulati nel linguaggio naturale; ma, come Frege rilevò, senza disporre di un linguaggio del tutto preciso, e senza rendere espliciti gli assunti e le regole d'inferenza della *logica stessa*, non si poteva mai essere sicuri che i propri assiomi rendessero espliciti *tutti* gli assunti di un dato settore matematico.

Il progetto di Frege, il quale mirava a ridurre *tutta* la matematica alla logica pura, era in special modo vulnerabile al pericolo che assunti nascosti di tipo matematico potessero inconsapevolmente venire usati nelle dimostrazioni se la logica impiegata in tali dimostrazioni non era stata completamente esplicitata in anticipo. È per questo motivo che Frege, prima di produrre la sua analisi del concetto di numero, pubblicò un sistema di logica completamente formalizzato (equivalente a quella che oggi si chiama logica del secondo ordine), nel suo *Begriffschrift* (*Ideografia*) del 1879. In realtà i timori di Frege sui pericoli dell'assiomatizzazione in linguaggi naturali erano giustificati; infatti, quando Hilbert formalizzò completamente la «geometria euclidea» scoprí parecchi assunti che lo stesso Euclide aveva usato implicitamente nelle dimostrazioni, ma

che non era riuscito a rendere espliciti nel suo elenco di assiomi e postulati!

Si potrebbe considerare la convergenza della tendenza algoritmica e di quella assiomatica alla fine del secolo XIX nel modo seguente: si possono avere algoritmi per risolvere particolari problemi matematici senza avere *assiomi* per il settore della matematica in cui sorgono quei problemi; ma ciò che evita la riduzione di *tutta* la matematica (o almeno di tutta la teoria elementare dei numeri) a un algoritmo è la mancanza di un metodo di decisione per la verità matematica (o per la verità nella teoria elementare dei numeri, o per la dimostrabilità formale nella teoria elementare dei numeri, secondo il risultato di Church).

I teoremi d'indecidibilità posero limiti essenziali al dominio di applicabilità del metodo algoritmico. Anche il metodo assiomatico è soggetto a limitazioni essenziali (come si vedrà tra poco), ma ognuna delle varie branche della matematica può essere completamente assiomatizzata (logica del primo ordine), o almeno parzialmente assiomatizzata (teoria dei numeri), benché possa non ammettere un algoritmo di decisione. I limiti dell'approccio algoritmico (intendendo 'algoritmo' nel senso di algoritmo di *decisione*), spingono a integrare questo approccio mediante elenchi di assiomi e di procedimenti di dimostrazione enunciati in modo esplicito (nel migliore dei casi, quello di una teoria *completa*, si può anche giungere a un algoritmo – un algoritmo per *enumerare* le proposizioni valide di una teoria matematica – anche se non esiste alcun algoritmo di *decisione*). L'approccio algoritmico, in ogni caso, sia che cerchiamo algoritmi di decisione o enumerazioni di proposizioni valide, richiede sempre una notazione del tutto soggetta a regole, poiché ciò è essenziale a *qualsiasi* algoritmo. D'altra parte, se viene privilegiato l'approccio assiomatico, il pericolo di lasciarsi sfuggire gli assunti impliciti in una assiomatizzazione conduce *ancora* nella direzione di un linguaggio formale. Cosí entrambe le tendenze si dirigono prima o poi verso la costruzione di *linguaggi simbolici per il ragionamento*. E quando l'approccio assiomatico viene esteso alla logica stessa, allora tale approccio conduce anche a *regole di deduzione espresse formalmente*; e infatti fu proprio Frege, rappresentante della tendenza assiomatica e fondazionale, il primo a dare regole complete per quella che oggi viene chiamata logica del primo ordine (anche se i principali rappresentanti della tendenza booleana, algoritmica – in particolare Peirce – erano già molto aperti verso tali regole ed è possibile che il «metodo dei diagrammi esistenziali» di Peirce contenga un completo procedimento di dimostrazione per la logica del primo ordine).

Oggi il conflitto tra queste tendenze è quasi del tutto composto; i logici considerano tanto la formalizzazione di assunti e di principî d'inferenza quanto la costruzione di algoritmi di decisione (per non citare lo studio sulla teoria degli insiemi delle interpretazioni e dei «modelli» delle teorie) come parti complementari e non incompatibili della loro attività.

Scorrendo la storia della formalizzazione della logica, si potrebbe essere indotti a caratterizzare in generale la formalizzazione cosí: *formalizzare* una teoria (cioè, un insieme deduttivamente chiuso di credenze, giudizi, asserzioni, ecc.) significa compiere due operazioni: 1) «formalizzare il linguaggio» della teoria, cioè costruire una notazione non ambigua, soggetta a regole, per esprimere gli asserti in questione; e 2) «formalizzare gli assunti» della teoria, cioè trascrivere gli assiomi (ossia dare una regola effettiva per dire se una formula sia annoverata tra gli assiomi o no), e dare le regole d'inferenza (spesso queste sono semplicemente le regole della logica del primo ordine). Questa caratterizzazione della formalizzazione è corretta, se intesa propriamente.

Non si può ritenere che dare *assiomi* per una teoria significhi che occorre dare assiomi da cui possono essere derivate *tutte* le proposizioni valide della teoria; infatti, come Gödel ha mostrato, nella sua classica opera sulle proposizioni indecidibili, qualsiasi teoria matematica che sia potente almeno quanto la teoria elementare dei numeri possiede la proprietà dell'*incompletezza essenziale*; cioè, la proprietà che *nessun* insieme finito di assiomi (e nessun insieme *infinito* che sia a sua volta decidibile) può essere completo e non-contraddittorio. Qualsiasi insieme non-contraddittorio di assiomi per la teoria elementare dei numeri che sia «ricorsivo» (tale cioè che esiste un algoritmo per dire se una formula arbitraria sia o non sia una assioma: ciò formalizza l'esigenza che gli *assiomi* di una teoria dovrebbero essere effettivamente riconoscibili), ripeto, qualsiasi insieme «ricorsivo» di assiomi che sia non-contraddittorio (e potente almeno quanto gli assiomi di Peano) è *incompleto*. Ci sono asserzioni della teoria dei numeri (formule ben formate del sistema) che non sono né formalmente dimostrabili né formalmente refutabili a partire dagli assiomi. (Questa formulazione del teorema d'incompletezza di Gödel include dei rafforzamenti dovuti a Rosser e Tarski, Mostowski, Raphael Robinson).

In breve, se si richiede che *tutte* le proposizioni valide di una teoria debbano essere formalmente derivabili in una formalizzazione riuscita, allora la logica del primo ordine può essere formalizzata ma non possono esserlo la teoria dei numeri, l'analisi, la teoria degl'insiemi, ecc. In pratica, ciò che si fa è indebolire *la nozione di formalizzazione*; se un insieme di assiomi dati è adeguato a tutte o virtualmente tutte le dimostrazioni che *realmente si presentano nei testi concernenti il settore in questione*, si può parlare di «formalizzazione». Ma si paga un prezzo per questo indebolimento: in realtà, quella di «formalizzazione» è divenuta essa stessa una nozione vaga e pragmatica.

Piuttosto che continuare con questo uso vago del termine, potrebbe davvero essere meglio parlare di «formalizzazione completa» solo quando il sistema formale costruito *sia* completo (nel senso che ogni proposizione valida sia formalmente derivabile, laddove una proposizione «valida» è una proposizione vera in tutte le interpretazioni intese del formalismo). Ci si riferirebbe allora a quelle che solitamente vengono chiamate «formalizzazioni» della teoria dei numeri, della teoria degli insiemi, ecc., come a *formalizzazioni parziali*.

5. *Formalismo e de-interpretazione.*

Nell'unico appellativo «formalismo» si confondono spesso due distinte concezioni filosofiche. La prima, il formalismo ingenuo, sostiene che *tutta* la matematica consiste di combinazioni di segni *senza significato* (cioè di formule

ben formate di sistemi formali *non-interpretati*); la seconda, il formalismo di Hilbert, asserisce che la matematica ha *due* componenti: sia la derivazione di teoremi «senza significato» *entro* sistemi formali non-interpretati, sia l'attività contenutistica (*inhaltlich*), informale, riflessiva che consiste nella costruzione dei sistemi e della riflessione su di essi nella matematica costruttiva.

A mia conoscenza, nessun matematico o filosofo prende oggi sul serio la prima di queste concezioni; è necessario però farvi almeno un cenno perché viene spesso confusa con la seconda concezione, quella piú sofisticata. Entrambe, ovviamente, utilizzano la nozione di linguaggio formalizzato e di sistema formale; entrambe suppongono che *dopo* la formalizzazione di un linguaggio sia necessario «de-interpretarlo» (cioè prescindere da qualsiasi significato che i segni possano mai aver avuto per noi al momento di scrivere gli assiomi). Anzi, spesso si è ritenuto, ma a torto, che la formalizzazione esigesse tale de-interpretazione; di conseguenza, per certuni, un certo impegno col formalismo (inteso come filosofia della matematica privilegiata) è addirittura ineliminabile dalla logica matematica stessa. Questo è un grave fraintendimento. Ciò che il formalismo ingenuo dimentica è che si formulano asserti dotati di significato *circa* i sistemi formali che sono *diversi* dai semplici asserti singolari tipo «La tale formula ben formata è stata derivata». Per esempio, si formulano anche asserzioni d'impossibilità sulla base di un ragionamento metamatematico informale, come «La tale formula ben formata *non* può essere derivata nel tale sistema». Asserti del genere sono simili ad asserti universali della teoria dei numeri tipo «L'equazione $x^3+y^3=z^3$ non ammette soluzioni intere positive»; di piú, le tecniche di dimostrazione sono del tutto analoghe. Fu per questa ragione che Hilbert distinse attentamente il ragionamento costruttivo della metamatematica dal ragionamento *nel* sistema formale non-interpretato. Restano però due difficoltà anche per la versione piú sofisticata del formalismo: 1) se il formalismo *rinunzia* a «de-interpretare» il ragionamento *costruttivo* circa gli oggetti formali (ad esempio, segni sulla carta), deve allora far propria un'epistemologia costruttivista della matematica. Ma questa non è mai stata messa a punto. (Non molto di piú, a mio avviso, ha fatto in questo senso l'intuizionismo). Sia i formalisti sia gli intuizionisti muovono dall'assunto che *alcune* asserzioni vertenti sulle nostre capacità costruttive siano «evidenti». Ma la fonte empirica o trascendentale di tale «evidenza» non è mai stata realmente spiegata. A suo tempo Locke avanzò la tesi secondo cui, quando si parla dell'esistenza di *infiniti* numeri interi, tutto quel che si vuol dire in realtà è che la mente ha il «potere» di contare indefinitamente, cioè di aggiungere un'unità a qualsiasi numero assegnato. Locke sostenne ancora che, proprio perché questo potere è una facoltà *della* mente, la mente può esserne consapevole: non è forse la mente immediatamente consapevole delle proprie facoltà? Ma le cose stanno davvero cosí? Spesso infatti si sente di avere la facoltà di compiere certe azioni che però *non si è poi in grado* di portare davvero a compimento, come risulta quando ci si sforza davvero di farle. Di piú: se s'intende *alla lettera* la stessa asserzione che si può andare avanti a contare *indefinitamente*, se la s'intende cioè come un'asserzione empirica, tale asserzione si rivela allora patentemente *falsa*. Se però si

intende la stessa asserzione come un'affermazione *trascendentale*, si vuol davvero sostenere con ciò che si deve far propria la teoria dell'io trascendentale di Kant per capire la matematica? Difficilmente questa concezione riscuoterebbe l'approvazione di quei filosofi o di quegli scienziati che sono fortemente orientati verso forme di naturalismo. 2) Ma un problema ancora piú serio per qualsiasi versione del formalismo vien posto dal tentativo di giustificare l'*applicazione* della matematica al mondo reale. Certe volte il formalista fa sua proprio un'ingenua filosofia operazionista della scienza fisica. Altre volte, invece, avanza la tesi secondo cui le teorie che impiegano nozioni matematiche possono essere applicate all'universo fisico in quanto l'universo fisico stesso od opportuni suoi sottosistemi, se non sono modelli in senso letterale, sono però *approssimativamente* simili a parti finite dei modelli delle teorie fisico-matematiche in questione. Nel caso piú semplice, per esempio contar delle pecore, il formalista suggerisce allora di trattare *raggruppamenti* (di pecore, nella fattispecie) come numeri e l'operazione fisica di *combinare* i vari raggruppamenti come addizione. Ma la cosa è troppo semplicistica per poter funzionare. Dopo tutto, si contano e si addizionano anche cose che *non* sempre si possono fisicamente combinare, per esempio «Giulio Cesare e Mussolini sono due dittatori; Hitler e Stalin sono due dittatori; tutti insieme fanno quattro dittatori». Si contano anche delle cose *astratte*, ad esempio le radici di un'equazione. Inoltre le cose cui si applicano parole-numero, come misero in luce Frege e Russell, non sono aggregati fisici, ma *insiemi* o *predicati*. L'aggregato fisico di tutte le contee degli Stati Uniti è identico all'aggregato fisico di tutti gli stati degli Stati Uniti, poiché entrambi gli aggregati (in quanto oggetti fisici) sono proprio gli Stati Uniti stessi; ma, quando si dice «Negli Stati Uniti ci sono cinquanta stati» non si vuol dire «Negli Stati Uniti ci sono cinquanta contee», poiché la parola-numero 'cinquanta' è predicato della *collezione* o *insieme* astratto degli stati, non dell'aggregato fisico corrispondente. Inoltre, quando in fisica si afferma che una certa forza «obbedisce alla legge dell'inverso del quadrato», non si chiarirà certo il significato empirico di un asserto del genere con le osservazioni appena citate del formalista. (Per tentare seriamente di precisare l'idea che il mondo fisico *è approssimativamente* un *modello* – o *parte* di un modello – di una teoria fisica sarebbe necessaria una logica di ordine superiore di quella di fatto utilizzata da Frege). È singolare che i formalisti non dicano *niente* sull'*applicazione* della matematica al mondo reale salvo il fare occasionalmente quel tipo di osservazioni appena discusse, e che ignorino la sofisticata discussione della questione dell'applicazione della matematica al mondo fisico intrapresa già da Frege nel 1880.

Ai fini di questo articolo, tuttavia, quel che importa ricordare è che gli scopi che condussero storicamente alla formalizzazione della logica, e piú tardi alla formalizzazione di teorie matematiche e di altro genere, non presupponevano affatto l'accettazione del formalismo come filosofia. Si può accogliere la concezione di Quine, che le parole-numero siano sin dal principio parte del nostro apparato concettuale *interpretato*, quantunque siano una parte astratta di esso (una parte alla pari con i connettivi logici stessi), ed essere tuttavia ancora

interessati agli scopi che hanno portato alla formalizzazione: alla ricerca di algoritmi, alla ricerca di un linguaggio preciso, alla ricerca di un chiaro insieme di assiomi e regole d'inferenza. Dovremmo anche guardarci dall'idea, pure assai diffusa, che la matematica è *all'origine* non-interpretata e solo *piú tardi* viene interpretata, *via* «regole di corrispondenza». Una rappresentazione del genere difficilmente ha ancora un senso se viene separata dalle idee formaliste che abbiamo or ora indicato. In realtà, tentare di «interpretare» la matematica senza avere *già* a disposizione concetti matematici è altrettanto impossibile quanto interpretare i *connettivi logici* senza avere già a disposizione i connettivi logici!

6. *I calcolatori e la mente.*

È con lo sviluppo del calcolatore digitale ad alta velocità che la formalizzazione entra a sua volta in una fase matura. Come è stato già osservato, ogni programma per calcolatore può essere considerato come la formalizzazione di un frammento di ragionamento. Molti programmi per calcolatore comportano la manipolazione di qualcosa di molto simile a formule di un linguaggio formalizzato e obbediscono a qualcosa di molto simile a regole d'inferenza. Non si parla del cosiddetto linguaggio di programmazione; il linguaggio usato per *scrivere* i programmi è esso stesso *alla lettera* un linguaggio formalizzato. Ma oltre a questo linguaggio vi sono programmi, in aree tanto diverse quanto l'identificazione di modelli e la traduzione meccanica, che necessitano della *macchina* – e non solo del programmatore – per «ragionare» in un linguaggio formalizzato.

Risale almeno a Hobbes l'intuizione che le operazioni algoritmiche su simboli «privi di significato» potessero essere i costituenti base di ciò che si chiama «ragionamento» (Hobbes sottolineò a questo proposito che la parola inglese *ratiocination* risaliva alla parola latina corrispondente a far di conto). Oggi quest'idea, l'idea che il ragionamento dotato di significato debba essere alla fine scomposto in costituenti elementari meccanici e puramente formali è d'importanza fondamentale nella psicologia cognitiva. La forma che prende quest'idea è quella del calcolatore come modello della mente.

Nell'idea del calcolatore come modello della mente, la mente ha un «programma», o insieme di regole, analoghe alle regole che governano una macchina calcolatrice, e il pensiero comporta la manipolazione di parole e di altri segni (non tutto in questa manipolazione è «cosciente», nel senso di poter venir verbalizzato dal calcolatore). Cosí come si presenta, tuttavia, questo modello è molto debole (nonostante l'animosità che suscita tra coloro cui non piace pensare che un semplice congegno, come una macchina calcolatrice, possa eventualmente servire da modello per qualcosa di cosí speciale come la mente umana). È debole perché il programma, o sistema di regole per il funzionamento mentale, non è stato specificato; ed è questo programma che costituisce la teoria psicologica. Dire semplicemente che la corretta teoria psicologica, qualunque essa sia, può essere rappresentata come un programma (o qualcosa di analogo a un programma) per un calcolatore (o qualcosa di analogo a un calcolatore) è dire

molto poco, perché potenzialmente ogni sistema che può essere descritto da un insieme di *leggi* può essere almeno *simulato* da un calcolatore. Dalla freudiana psicologia del profondo al comportamentismo di Skinner, tutto può essere rappresentato come un certo programma per calcolatore.

Oggi, però, i cibernetici che lavorano nell'area che viene chiamata con l'affascinante nome di «intelligenza artificiale» e gli psicologi cognitivi che si occupano di riferimento, rappresentazione semantica, uso del linguaggio, ecc., hanno un'ipotesi piú precisa di quella della possibilità di costruire un modello della mente con un calcolatore digitale. (Anche quell'ipotesi, tuttavia, non è vuota perché implica *qualcosa*: la struttura causale dei processi mentali; che essi hanno luogo in obbedienza a regole deterministiche o probabilistiche di sequenzialità secondo un programma finito). L'altra ipotesi su cui vanno convergendo sia coloro che lavorano sulle macchine calcolatrici sia gli psicologi cognitivi è che la mente pensa per mezzo di *rappresentazioni*. Di fatto sembra che oggi vi siano due idee diverse circa tali «rappresentazioni».

La prima idea, basata sull'esperienza dei tentativi di simulare il comportamento intelligente (onde il termine 'intelligenza artificiale') programmando dei calcolatori è che l'atto del pensare non implica solo la manipolazione di oggetti o simboli arbitrari, ma richiede la manipolazione di simboli che hanno una struttura molto particolare, precisamente la struttura di ciò che si chiama *linguaggio formalizzato*. L'esperienza dei cibernetici era che i programmi piú interessanti e riusciti di «intelligenza artificiale» risultano *in modo tipico* quelli in cui si dava alla macchina calcolatrice qualcosa di simile a un linguaggio formalizzato e a un insieme di regole d'uso di quel linguaggio formalizzato («ragionare» nel linguaggio, per cosí dire).

La seconda idea associata al termine 'rappresentazione' è che la mente umana pensa (in parte) costruendo un qualche tipo di «modello» del suo ambiente, un «modello del mondo». Questo «modello», naturalmente, non deve assomigliare letteralmente al mondo. È sufficiente l'esistenza di qualche tipo di *relazione sistematica* tra voci interne al sistema di rappresentazione e voci «esterne» a esso, in modo che ciò che accade all'«esterno» possa venir decifrato dalla mente col suo sistema di rappresentazione.

Si mettano insieme queste due idee e ciò che risulta si può chiamare l'*Ipotesi fondamentale della psicologia cognitiva*: che la mente usa un linguaggio formalizzato (o qualcosa di molto simile a un linguaggio formalizzato) sia come mezzo di calcolo sia come mezzo di rappresentazione. Approfondire quest'ipotesi porterebbe al di là dell'ambito di questo articolo; ma essa può, sul lungo periodo, rivelarsi come l'applicazione piú importante del concetto di formalizzazione.

7. *Formalizzazione e antinomie.*

Un discorso sulla formalizzazione non sarebbe completo senza accennare alle cosiddette «antinomie»; il paradosso di Russell e i paradossi semantici descritti in altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*, cioè contraddizioni derivate

da assunzioni che sono in se stesse del tutto «evidenti», o piuttosto che *sarebbero* «evidenti» se non portassero contraddizioni. Che esistano intuizioni auto-contraddittorie circa un certo numero di nozioni fondamentali della logica è essa stessa una delle grandi scoperte epistemologiche del secolo XX. Non che siano nuovi i paradossi in sé: i paradossi semantici, quanto meno, erano noti nell'antichità classica; è del tutto nuova la *valutazione della loro importanza epistemologica.*

Tuttavia si è giunti a questa valutazione solo *perché* per la prima volta si è *formalizzata* la logica (compresa la logica di ordine superiore e la teoria della verità). Fin tanto che un corpo di dottrine non è formalizzato, i paradossi possono essere liquidati come semplici curiosità oziose. Ma quando si cerca di presentare o la teoria degli insiemi o la teoria della verità e del riferimento come un coerente corpo di dottrine, come si è costretti a fare quando si formalizzano queste teorie, un simile atteggiamento liquidatorio non basta. Come scrisse Zermelo [1908]: «La teoria degli insiemi è quella branca della matematica che ha il compito d'indagare matematicamente le nozioni fondamentali di "numero", "ordine" e "funzione", prese nella loro forma semplice, primitiva, e di sviluppare di conseguenza i fondamenti logici di tutta l'aritmetica e l'analisi. Essa costituisce dunque una componente indispensabile della scienza matematica. Al momento, però, la stessa esistenza di questa disciplina sembra minacciata da certe contraddizioni, o "antinomie", che si possono derivare dai suoi principî – principî che sembrano regolare in modo necessario il nostro pensiero – e a cui non è ancora stata trovata alcuna soluzione del tutto soddisfacente. In particolare, a proposito della "antinomia di Russell" circa l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elementi, non sembra piú ammissibile oggi assegnare a una arbitraria nozione logicamente definibile un insieme o classe, come sua estensione. La definizione originaria di Cantor dell'insieme come "collezione, unita in un tutto, di certi oggetti ben distinti della nostra percezione o del nostro pensiero" [1895, p. 481] richiede perciò delle restrizioni; tuttavia non è stata sostituita con successo da una che sia altrettanto semplice e non faccia sorgere analoghe riserve. In queste circostanze non rimane, a questo punto, che procedere nella direzione opposta e, partendo dalla teoria degli insiemi come è storicamente data, ricercare i principî necessari per stabilire i fondamenti di questa disciplina matematica. Per risolvere il problema si deve, da un lato, restringere questi principî in modo sufficiente a escludere tutte le contraddizioni e, dall'altro lato, prenderli abbastanza estesi da contenere tutto ciò che in questa teoria resta valido» (p. 261).

Il fatto che la formalizzazione metta in luce cosí chiaramente quali sono le antinomie in un corpo di dottrine e a quali conseguenze porti ogni proposta per evitarle, suggerisce che si dovrebbe ricorrere piú ampiamente alla formalizzazione nei settori della scienza minacciati da paradossi o contraddizioni. In particolare, i fondamenti della meccanica quantistica si potrebbero discutere piú facilmente se le formalizzazioni della meccanica quantistica cercassero di descrivere l'interpretazione della teoria (per esempio, le sue connessioni con gli esperimenti), e non assumessero semplicemente la nozione di misura come primitiva. I fondamenti della meccanica quantistica sono oggi tanto poco chiari quanto lo erano i fondamenti della teoria degl'insiemi nel primo decennio del secolo XX; ma i fisici hanno cercato di liquidare il problema con pronunciamenti *ex cathedra* sul fatto che ogni cosa collimava perfettamente con ciò che essi capivano veramente, anziché affrontare i paradossi con la stessa ammiravole onestà e chiarezza di Russell, Frege, Zermelo e dei loro continuatori. La formalizzazione talvolta può essere frivola, non necessaria o distogliere addirittura l'attenzione dai problemi reali; ma dove c'è il problema di una contraddizione reale o apparente nelle nostre idee fondamentali, non esiste strumento migliore per chiarificarlo. «Chiarificare» e non «risolvere» perché *nessun* metodo garantisce la *soluzione* di difficili problemi concettuali; ma la chiarificazione è l'indispensabile prerequisito di ogni soluzione. [H. P.].

Cantor, G.
1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)*, in «Mathematische Annalen», XLVI, pp. 481-512; ora in *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin 1932.

Quine, W. van Orman
1950 *Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, New York (trad. it. Feltrinelli, Milano 1960).

Zermelo, E.
1908 *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Mathematische Annalen», LIX, pp. 261-81.

Considerata inizialmente in rapporto con un **algoritmo** che, liberato da qualsiasi problema di **semantica**, opererebbe senza **ambiguità** su di un **linguaggio** (cfr. **automa**), la formalizzazione pone numerosi problemi. In un **calcolo** del prim'ordine, si presentano anche problemi di decidibilità (cfr. **ricorsività**). La formalizzazione ricostruisce le nozioni intuitive di **deduzione/prova**, fornendo regole d'inferenza precise ed esaustive (cfr. **possibilità/necessità**, **referenza/verità**) e chiarendo il senso e i limiti della nozione di validità; la formalizzazione pone inoltre il problema delle relazioni fra la **logica** e le **matematiche**. La problematica della formalizzazione si trova associata a quella dell'assiomatizzazione (cfr. **assioma/postulato**), che si espone pertanto a dei limiti. È opportuno distinguere tra una formalizzazione completa, quando ogni formula valida del sistema è formalmente derivabile dagli assiomi, e le formalizzazioni parziali, ad esempio nella teoria dei numeri (cfr. **numero**). I problemi filosofici della formalizzazione ruotano attorno all'**interpretazione** dei sistemi formali (cfr. **applicazioni**). L'esito della formalizzazione è attualmente rappresentato dai calcolatori digitali (cfr. **analogico/digitale**) che, in una certa misura, possono venir concepiti come un **modello delle operazioni** della **mente** (cfr. **intelligenza artificiale**).

Logica

Per illustrare sia l'oggetto della logica sia il modo in cui il metodo matematico ne ha trasformato lo studio si confronteranno fra loro gli approcci di due grandi logici: Aristotele, il fondatore della logica formale in quanto disciplina autonoma, e George Boole, il fondatore della logica matematica. Verrà invertito, tuttavia, l'ordine storico, perché è piú facile descrivere in termini booleani ciò che ha fatto Aristotele che non descrivere in termini aristotelici ciò che ha fatto Boole. Successivamente, verrà descritta l'evoluzione della logica nel corso del XIX secolo e all'inizio del XX: il «calcolo proposizionale», la «logica del prim'ordine» e, soprattutto, la grande impresa di «ridurre la matematica alla logica» compiuta da Frege e riveduta e corretta da Russell e Whitehead nei *Principia Mathematica*, l'opera che ha prodotto l'impatto maggiore di qualunque altro testo di logica del periodo moderno sia sui logici sia sui filosofi. Verranno illustrati poi alcuni dei contributi della logica moderna dopo i *Principia* e si riferirà, infine, sullo stato attuale delle filosofie della logica e della matematica.

1. *L'algebra booleana e l'algebra ordinaria.*

Boole (la cui *Mathematical Analysis of Logic* fu pubblicata nel 1847) partiva da una classe, o insieme (si userà indifferentemente uno di questi due termini), che chiamava «universo del discorso». Verrà denotata con V invece che con 1 come faceva Boole. V comprende la totalità delle cose che costituiscono l'oggetto di un discorso. (L'idea che l'universo del discorso o «dominio», come viene detto spesso oggi, non debba necessariamente essere fissato una volta per tutte è molto importante nella logica contemporanea). Ogni sottoinsieme di V – cioè, ogni collezione di membri di V – è una «classe» e può essere denotato con una qualsiasi lettera, come ad esempio A, B, C, ... Inoltre, A, B, C, ... possono essere usate per denotare classi arbitrarie allo stesso modo in cui nell'algebra si usano le variabili per denotare numeri arbitrari e, proprio come nell'algebra, si possono scrivere delle equazioni fra di esse. Ad esempio, se l'universo V è la classe di tutti gli *esseri umani*, A potrebbe essere la classe di tutti gli uomini, B la classe di tutte le donne, C la classe di tutti i bambini, e l'equazione $V = A \cup B \cup C$ direbbe che ogni essere umano è un uomo o una donna o un bambino.

Le operazioni sono l'unione di due classi, cioè la formazione della classe di tutte le cose che appartengono ad almeno una delle due o a entrambe, indicata solitamente con il simbolo '$\cup$', l'intersezione di due classi, cioè la formazione della classe di tutte le cose che appartengono a entrambe, indicata solitamente con il simbolo '$\cap$', e l'operazione che consiste nel formare il complementare di una classe, cioè la classe di tutti i membri di V che non appartengono alla

classe in questione, e che viene denotata solitamente ponendo una sbarretta sopra il simbolo della classe: ad esempio, $\bar{A}$ è il complementare di A. (Boole, invece della semplice unione come si fa oggi, prendeva come operazione primitiva la disgiunzione esclusiva, cioè la formazione della classe di tutte le cose che stanno in $A-B$ *piú* la classe di tutte le cose che stanno in $B-A$, cioè della classe di tutte le cose che stanno in *A o in B, ma non in entrambe*).

Proprio come nell'algebra ordinaria c'è uno zero, anche nell'algebra della logica esiste uno zero costituito dall'insieme vuoto, che si denoterà con $\varnothing$. Il complementare dell'universo del discorso V è ovviamente vuoto, cioè $\bar{V}=\varnothing$ e cosí pure $\bar{\varnothing}=V$.

Se A è la classe dei pirati e B è la classe dei nobili, allora $A\cup B$ è la classe di tutte le persone che sono o nobili o pirati e $A\cap B$ è la classe di tutti i pirati nobili. Se A e B sono dei cerchi, queste operazioni possono essere rappresentate come nel diagramma della figura 1.

Quelli che seguono sono esempi di leggi logiche corrette scritte in questo simbolismo:

(1)	$X\cap Y=Y\cap X$	proprietà commutativa dell'intersezione
(2)	$X\cup Y=Y\cup X$	proprietà commutativa dell'unione
(3)	$\bar{\bar{X}}=X$	legge della doppia negazione
(4)	*a*) $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$ *b*) $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$	proprietà distributive
(5)	*a*) $\overline{X\cup Y}=\bar{X}\cap\bar{Y}$ *b*) $\overline{X\cap Y}=\bar{X}\cup\bar{Y}$	«leggi di De Morgan»
(6)	$X\cup\bar{X}=V$	proprietà di V, $\varnothing$ e del complementare.
(7)	$X\cap\bar{X}=\varnothing$.	

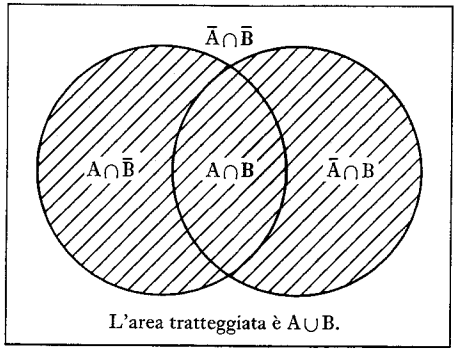


Figura 1.
L'universo V.

Molte di queste leggi sono simili a quelle dell'algebra ordinaria. Cosí, se s'interpreta l'intersezione come la moltiplicazione e l'unione come l'addizione, le equazioni (1), (2) e (4*a*) corrispondono alle identità algebriche ordinarie $XY=YX$ (proprietà commutativa della moltiplicazione), $X+Y=Y+X$ (proprietà commutativa dell'addizione) e $X(Y+Z)=XY+XZ$ (proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Inoltre, le leggi logiche

(8) *a*) $X\cap V=X$
b) $X\cap\varnothing=\varnothing$
c) $X\cup\varnothing=X$

corrispondono alle identità algebriche $X\cdot 1=X$, $X\cdot 0=0$ e $X+0=X$ se s'interpreta V come 1 e $\varnothing$ come 0. Tuttavia, la seconda legge distributiva della logica (4*b*) è sorprendente: $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$ *non* è algebra corretta! In effetti, la relazione che corre fra (4*a*) e (4*b*) e fra (5*a*) e (5*b*) illustra un fatto molto importante, analogo alla dualità fra «retta» e «punto» della geometria proiettiva: *se in una legge logica corretta si sostituisce* $\cup$ *con* $\cap$ *e* $\cap$ *con* $\cup$ *scambiando contemporaneamente fra loro* $\varnothing$ *e V, la legge rimane corretta* (principio di dualità). È questo un principio che non fu mai rilevato da nessun logico antico, ma che diventa facile da scoprire (e non difficile da dimostrare) quando si usa la notazione algebrica.

Boole scoprí altre leggi logiche che non sono valide nell'algebra ordinaria, come ad esempio 'X al quadrato è uguale a X', cioè $X\cap X=X$ e 'X piú X è uguale a X', cioè $X\cup X=X$ (proprietà di idempotenza dell'intersezione e dell'unione).

Grazie a queste «proprietà di idempotenza» si possono effettuare delle semplificazioni che non sarebbero valide nell'algebra ordinaria. In effetti, ogni prodotto di «polinomi logici» può essere semplificato come nell'algebra ordinaria e poi ulteriormente semplificato servendosi delle proprietà di idempotenza (cioè, da un punto di vista algebrico, ponendo tutti gli esponenti e i coefficienti uguali a 1). Un altro strumento di semplificazione è la «proprietà di assorbimento»: $X\cup(X\cap Y)=X$.

Anche la complementazione ha degli analoghi algebrici, ma non verranno discussi qui. Conviene tuttavia notare che le sbarrette del complementare possono sempre essere accorciate servendosi delle leggi di De Morgan e della legge della doppia negazione fintanto che non siano ridotte a stare sopra lettere singole, come nell'esempio seguente:

$$\begin{aligned}
\overline{(X\cap(\bar{Y}\cup Z))\cup\bar{A}} &= \overline{(X\cap(\bar{Y}\cup Z))}\cap\bar{\bar{A}}= && \text{(per le leggi di De Morgan)}\\
&= \overline{(X\cap(\bar{Y}\cup Z))}\cap A= && \text{(per la legge della doppia negazione)}\\
&= (\bar{X}\cup\overline{(\bar{Y}\cup Z)})\cap A= && \text{(De Morgan)}\\
&= (\bar{X}\cup(\bar{\bar{Y}}\cap\bar{Z}))\cap A= && \text{(De Morgan)}\\
&= (\bar{X}\cup(Y\cap\bar{Z}))\cap A= && \text{(doppia negazione).}
\end{aligned}$$

2. *Applicazioni dell'algebra booleana ai ragionamenti.*

Si consideri un ragionamento espresso in linguaggio ordinario, ad esempio:

'Tutti gli uomini sono mortali'
'Tutti i banchieri sono uomini'

(dunque) 'Tutti i banchieri sono mortali'.

Se si indica con H la classe degli uomini, con M la classe dei mortali, con B la classe dei banchieri e si prende come universo quella di tutti gli esseri animati, allora gli enunciati precedenti possono essere espressi simbolicamente in notazione booleana nel modo seguente:

'Tutti gli uomini sono mortali' equivale a $H\bar{M} = \varnothing$
'Tutti i banchieri sono uomini' $B\bar{H} = \varnothing$
'Tutti i banchieri sono mortali' $B\bar{M} = \varnothing$

(è stato omesso per brevità il simbolo $\cap$; cosí, $H\bar{M}$, $B\bar{H}$, $B\bar{M}$ sono rispettivamente abbreviazioni di $H \cap \bar{M}$, $B \cap \bar{H}$, e $B \cap \bar{M}$).

Questo ragionamento sarà valido solo se $B\bar{M}$ è vuota ogni volta che $H\bar{M}$ e $B\bar{H}$ sono entrambe vuote e ciò accadrà solo se $B\bar{M}$ è completamente contenuta in $H\bar{M} \cup B\bar{H}$.

Per vedere se questo è vero, ci si serve dell'identità logica $X \cap (Y \cup \bar{Y}) = X \cap V = X$ per «sviluppare» $B\bar{M}$ in funzione delle tre lettere B, M e H: $B\bar{M} = B\bar{M} \cap (H \cup \bar{H}) = B\bar{M}H \cup B\bar{M}\bar{H}$.

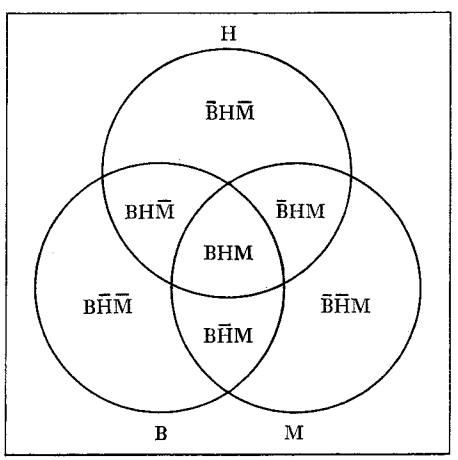


Figura 2.
Le otto regioni fondamentali.

Questo mostra che $B\bar{M}$ è l'unione delle due regioni fondamentali $B\bar{M}H$ e $B\bar{M}\bar{H}$ (cfr. fig. 2). Si chiamano «regioni fondamentali» le otto regioni $\bar{B}H\bar{M}$, $BH\bar{M}$, $\bar{B}HM$, BHM, $B\bar{H}\bar{M}$, $B\bar{H}M$, $\bar{B}\bar{H}M$, $\bar{B}\bar{H}\bar{M}$, perché tutte le classi che possono essere formate usando soltanto le tre lettere B, M e H possono essere espresse come unioni (compresa l'unione vuota $\varnothing$) di un numero compreso fra zero e otto di regioni fondamentali.

Analogamente, sviluppando $H\bar{M}$ si ottiene $H\bar{M} = H\bar{M} \cap (B \cup \bar{B}) = H\bar{M}B \cup H\bar{M}\bar{B} = B\bar{M}H \cup \bar{B}\bar{M}H$ e quest'ultima espressione contiene una delle due regioni fondamentali che compongono $B\bar{M}$. Poiché $H\bar{M}$ è vuota in virtú della prima premessa, ne segue che questa regione fondamentale – $B\bar{M}H$ – è anch'essa vuota. (Se $X \cup Y = \varnothing$, allora $X = \varnothing$ e $Y = \varnothing$).

Analogamente, $B\bar{H} = B\bar{H}M \cup B\bar{H}\bar{M} = BM\bar{H} \cup B\bar{M}\bar{H}$ e, poiché $B\bar{H}$ è vuota in virtú della seconda premessa, lo stesso accade di $BM\bar{H}$, che è l'altra regione che costituisce $B\bar{M}$. Ne segue che $B\bar{M}$ è vuota ogni volta che le premesse sono entrambe vere e perciò il ragionamento precedente è logicamente corretto, o «valido».

Si sarebbe anche potuto verificare la validità del ragionamento precedente *negandone* la conclusione, cioè 'Alcuni banchieri non sono mortali' ($B\bar{M} \neq \varnothing$) e cercando di vedere se la terna $H\bar{M} = \varnothing$, $B\bar{H} = \varnothing$, $B\bar{M} \neq \varnothing$ è incompatibile, perché è evidente che un ragionamento è valido se e solo se il sistema di enunciati costituito dalle sue premesse e dalla negazione della sua conclusione è incompatibile. Ora, la terna è incompatibile proprio nel caso in cui le regioni che devono essere vuote se le premesse sono vere – cioè, quelle regioni contenute in $H\bar{M}$ e $B\bar{H}$ – riempiono la classe che si suppone essere non-vuota, cioè $B\bar{M}$.

Qualsiasi ragionamento le cui premesse e la cui conclusione possono essere espresse con i simboli dell'algebra booleana può essere *deciso* (cioè, se ne può determinare la validità o la non-validità) 1) scrivendone tutti gli enunciati sotto la forma di asserzioni del fatto che un'espressione booleana è o non è uguale a $\varnothing$ (poiché $A = B$ è equivalente a $A\bar{B} \cup B\bar{A} = \varnothing$, ciò può sempre essere fatto) e 2) servendosi della tecnica di sviluppo precedente per esprimere tutte le classi che vi compaiono come somme di regioni fondamentali nel modo illustrato. Naturalmente, se nel ragionamento espresso simbolicamente compaiono n variabili di classe, ci saranno 2^n regioni fondamentali.

3. *Aristotele e Boole.*

Fu Aristotele a notare per primo che certi ragionamenti sono corretti soltanto in virtú della loro *forma*. Ad esempio, ogni ragionamento della forma:

'Tutti gli S sono M'
'Tutti gli M sono P'

(dunque) 'Tutti gli S sono P'

è logicamente corretto. (Qui si assume che S, M e P stiano per dei «termini», cioè per delle espressioni che hanno come estensioni delle classi definite e che lo stesso termine abbia come estensione la stessa classe ogni volta che occorre nel ragionamento). E fu Aristotele a rendersi conto della possibilità di una scienza della *logica formale*, cioè di una scienza che studi e classifichi le forme di ragionamento valide (e anche quelle non-valide).

Tuttavia, anche dal punto di vista del Boole degli anni '40 dell'Ottocento, l'opera di Aristotele era limitata. Come è stato spesso osservato, Aristotele era legato all'enunciato della forma soggetto-predicato. Questo fatto lo condusse a confinare la maggior parte della sua attenzione agli enunciati contenenti due termini. (Altri logici, sia nell'antichità sia nel medioevo, presero in considerazione enunciati un po' piú complessi, ma il prestigio di Aristotele era cosí grande che la loro opera non ebbe un'influenza né vasta né duratura). La logica aristotelica si limitava in gran parte allo studio di enunciati delle seguenti quattro forme:

Forme aristoteliche		*Simbolismo booleano*
Universale affermativa	'Tutti gli S sono P'	$S\bar{P} = \varnothing$
Particolare affermativa	'Alcuni S sono P'	$SP \neq \varnothing$
Universale negativa	'Nessun S è P'	$SP = \varnothing$
Particolare negativa	'Alcuni S non sono P'	$S\bar{P} \neq \varnothing$.

Gli enunciati singolari 'Socrate è un uomo' e 'Socrate non è un uomo' venivano assimilati artificialmente alle forme Universale affermativa e Universale negativa ('Tutti i Socrate sono uomini' e 'Nessun Socrate è un uomo') – un difetto molto grave della teoria logica tradizionale, perché la differenza di forma fra enunciati singolari ed enunciati generali è d'importanza cruciale per gli sviluppi logici moderni, in particolare per l'analisi delle relazioni e del concetto di numero. Cosí

'Tutti gli uomini sono mortali'
'Socrate è un uomo'
———————————
(dunque) 'Socrate è mortale'

veniva considerato come se avesse la stessa forma del ragionamento su 'Tutti i banchieri sono mortali' analizzato nel paragrafo precedente.

Non si tenterà qui di dare niente di piú di una descrizione sommaria della logica tradizionale. Anche se non furono studiati esplicitamente, si può cominciare coll'esaminare gli enunciati in cui entrambi i termini sono uguali (come, ad esempio, 'Tutti gli A sono A'). Ce ne sono ovviamente quattro:

1) 'Tutti gli A sono A'.
2) 'Nessun A è A'.
3) 'Alcuni A sono A'.
4) 'Alcuni A non sono A'.

L'enunciato 1) (in notazione booleana, $A\bar{A} = \varnothing$) è ovviamente valido. I logici tradizionali chiamavano gli enunciati di questo tipo 'tautologie', termine usato oggi per indicare le formule valide del calcolo proposizionale. L'enunciato 4) è ovviamente una contraddizione ($A\bar{A} \neq \varnothing$). Il principio che afferma che gli enunciati di questo tipo sono contraddittori era detto «principio di contraddizione» ('Nulla è sia A sia non-A'). Che cosa si può dire invece degli enunciati 2) e 3)? Aristotele e i suoi seguaci non presero mai in considerazione la possibilità che un insieme sia vuoto. Tuttavia, questa possibilità è molto importante. Molto spesso un ragionamento concerne una classe che è noto essere vuota (ad esempio, quella degli unicorni) e anche piú frequentemente capita di parlare di una classe di cui non si sa se sia vuota oppure no (ad esempio, quella dei serpenti marini che vivono nel Loch Ness). La noncuranza dei logici antichi è forse piú analoga all'incapacità da parte dei matematici di rendersi conto della necessità di includere nel sistema dei numeri interi un numero «zero» prima dell'invenzione della notazione araba, ma conduce a seri inconvenienti nella logica tradizionale. Bisogna perciò dire *o* che nella logica tradizionale 'termine' significa 'termine che ha come estensione una classe *non-vuota*' – impedendo cosí di analizzare i ragionamenti sui serpenti marini del Loch Ness fino a quando non si sarà scoperto che ce ne sono – *oppure* che la 3) non è valida: cioè, che è falso che 'Alcuni A sono A' ($AA \neq \varnothing$) quando A è l'insieme vuoto. E bisogna dire che la 2) non è una contraddizione: cioè, che è *vero* che 'Nessun A è A' ($AA = \varnothing$) quando A è l'insieme vuoto. I logici antichi e la maggior parte di quelli medievali non si resero conto di questo dilemma. Per essi 'Nessun A è A' era una forma di contraddizione e 'Alcuni A sono A' era una tautologia. Cosí (a causa della noncuranza) ogni enunciato in cui compare due volte lo stesso termine in una delle quattro forme tradizionali era considerato una tautologia o una contraddizione e perciò soltanto gli enunciati della forma, ad esempio, 'Tutti gli S sono P', in cui compaiono due lettere distinte, venivano ammessi negli schemi di ragionamento. (Se gli antichi si fossero accorti della loro dimenticanza, avrebbero potuto fare buon uso dell'enunciato 'Alcuni A sono A', perché esso esprime esattamente il fatto che la classe A non è vuota). Gli antichi studiarono le inferenze con una premessa del tipo 'Tutti gli S sono P', 'Alcuni S sono P', 'Alcuni S non sono P', 'Nessun S è P' e una conclusione dello stesso tipo (con S e P nello stesso ordine che nella premessa o in ordine inverso). Le possibili «inferenze immediate» di questo genere sono trentadue. Le uniche valide sono le due seguenti:

	Inferenza	*Simbolismo booleano*
(1)	'Nessun S è P'	$SP = \varnothing$
	(dunque) 'Nessun P è S'	$PS = \varnothing$
(2)	'Alcuni S sono P'	$SP \neq \varnothing$
	(dunque) 'Alcuni P sono S'	$PS \neq \varnothing$

Inoltre, i logici tradizionali ritenevano che «alcuni» segua da «tutti» (perché ignoravano la possibilità che una classe sia vuota) e che «alcuni... non» segua da «nessuno». Perciò, le seguenti «inferenze immediate», che oggi non sono considerate valide, venivano tradizionalmente classificate fra quelle valide:

	Inferenza	*Simbolismo booleano*
(3)	'Tutti gli S sono P'	$S\bar{P} = \varnothing$ (con la premessa $S \neq \varnothing$)
	(dunque) 'Alcuni S sono P'	$SP \neq \varnothing$
(4)	'Tutti gli S sono P'	Stesse premesse
	(dunque) 'Alcuni P sono S'	$PS \neq \varnothing$
(5)	'Nessun S è P'	$SP = \varnothing$ (con la premessa $S \neq \varnothing$)
	(dunque) 'Alcuni S non sono P'	$S\bar{P} \neq \varnothing$
(6)	'Nessun S è P'	$SP = \varnothing$ (con la premessa $P \neq \varnothing$)
	(dunque) 'Alcuni P non sono S'	$P\bar{S} = \varnothing$

Il tipo centrale d'inferenza elaborato da Aristotele è il sillogismo, che costituisce anche il cuore della sua teoria logica. I sillogismi sono inferenze della seguente forma (quale fu resa infine standard dai logici tradizionali): una prima premessa del tipo 'Tutti gli M sono P', 'Alcuni M sono P', 'Alcuni M non sono P' o 'Nessun M è P' (o una di queste con le lettere M e P in ordine inverso); una seconda premessa che appartiene pure a uno degli otto tipi precedenti, ma con la lettera 'S' in luogo di 'P' ('S' sta per il soggetto della conclusione, 'P' per il predicato della conclusione e 'M' per il termine 'medio'. Le due premesse in questa forma standard sono note rispettivamente come premessa maggiore e premessa minore); e una conclusione che è di uno dei quattro tipi 'Tutti gli S sono P', 'Alcuni S sono P', 'Alcuni S non sono P', 'Nessun S è P'. Queste sono tutte le inferenze possibili in cui 1) tutti e tre gli enunciati sono di uno dei quattro tipi aristotelici; 2) le premesse e la conclusione contengono ciascuna due termini distinti; 3) l'inferenza contiene esattamente tre termini; 4) il termine che non compare nella conclusione (il «termine medio») compare in ciascuna delle premesse e i termini che compaiono nella conclusione compaiono ciascuno in una delle due premesse.

Ci sono evidentemente soltanto 256 possibili forme di sillogismo (o «modi», come erano chiamati), di cui ventiquattro erano tradizionalmente considerati modi validi (compresi alcuni che non sono validi senza l'ipotesi che una delle classi non sia vuota). Aristotele prese in esame anche ragionamenti con piú di due premesse, ma la maggior parte di essi poteva essere spezzata in una catena di sillogismi.

Il genio di Aristotele è evidente: egli creò una scienza interamente nuova e fu lui, insieme con i suoi seguaci, a introdurre artifici come l'uso di lettere mute per denotare i termini e termini fondamentali quali 'valido', 'non-valido', 'contraddittorio', 'universale' e 'particolare'; ma l'opera di Aristotele impose alla logica un certo numero di vincoli paralizzanti, soprattutto per l'eccessiva enfasi posta nello studio dei 256 modi del sillogismo e nella considerazione degli enunciati che contengono esattamente due termini.

Il grande merito di Boole fu quello di eliminare entrambe queste restrizioni. Vi sono infiniti ragionamenti validi e infiniti ragionamenti non-validi la cui validità o non-validità può essere determinata dall'algebra booleana. Inoltre, Boole introdusse nello studio della logica metodi algebrici quali l'uso delle proprietà distributive e degli sviluppi. Anche se oggi costituiscono soltanto un frammento della logica, queste tecniche rimangono parte essenziale del bagaglio di ogni logico.

Il difetto dell'opera di Boole – che fu rilevato dai suoi successori e, prima ancora, dal suo contemporaneo De Morgan – sta nel fatto che anche la sua notazione è incapace di analizzare infinite inferenze deduttive, compresa la maggior parte delle dimostrazioni matematiche. S'incontreranno fra breve esempi delle limitazioni dell'«algebra della logica» di Boole quando verranno discusse le inferenze che involgono le relazioni e la generalità multipla. Mentre però l'opera di Aristotele stabilizzò la disciplina per dei millenni, quella di Boole, venendo in un'epoca piú scientifica, contribuí a fornirle nuove ispirazioni. Entro quarant'anni Frege riuscí a completare una teoria della deduzione che era in grado di esprimere simbolicamente tutta la matematica esistente (anche se ci vollero altri trentacinque anni per perfezionarla e lo studio delle proprietà matematiche della struttura che ne risultò è un compito dei nostri giorni in continua crescita).

Prima di prendere in esame tali questioni, si descriverà nel paragrafo successivo una seconda parte fondamentale (molti filosofi direbbero *la* parte fondamentale) della logica elementare: il cosiddetto «calcolo proposizionale».

Osservazione storica: alcune parti dell'algebra booleana furono anticipate da Leibniz nel XVII secolo. L'opera di Leibniz, tuttavia, non diede origine a una linea di sviluppo continuativa.

4. *La logica degli enunciati e l'algebra booleana.*

Si useranno lettere minuscole come p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'', ... per denotare asserti, cioè enunciati che sono veri o falsi. (Russell li chiamava «proposizioni» e di qui deriva il nome di «calcolo proposizionale» che viene ancora usato talvolta per indicare questa parte della logica). In analogia con l'unione $\cup$, l'intersezione $\cap$ e la sbarretta del complementare dell'algebra booleana, vengono ora introdotti i simboli $\vee$, $\wedge$ (che viene spesso omesso per brevità) e $-$ (scritto o prima di, o sopra a, una formula) per rappresentare le seguenti operazioni:

1) '$p \vee q$ è vero se p è vero oppure q è vero oppure p, q sono entrambi veri, e falso in caso contrario'.
2) '$p \wedge q$ è vero se p e q sono entrambi veri, e falso in caso contrario'.
3) '$-p$ (o $\bar{p}$) è vero se p è falso e falso se p è vero'.

Queste operazioni (che fanno passare da enunciati a enunciati) sono strettamente legate alle corrispondenti operazioni sulle classi. Come fu osservato da Boole, ad esempio, l'insieme delle circostanze in cui 'p o q' è vero è l'unione dell'insieme delle circostanze in cui p è vero e dell'insieme delle circostanze in cui q è vero. Boole usava lo stesso simbolo per denotare le operazioni $\cup$ e $\vee$ e lo stesso simbolo per denotare le operazioni $\cap$ e $\wedge$, ecc. Questo suo modo di procedere era pienamente giustificato, perché il calcolo proposizionale è in realtà soltanto una *seconda interpretazione* del calcolo formale dell'algebra booleana. (Uno dei contributi piú importanti portati da Boole alla logica fu la nozione di *calcolo senza interpretazione* e l'osservazione che a un tale calcolo si possono, in generale, dare un numero qualsiasi di interpretazioni diverse rispetto alle quali tutte le regole di operazione del sistema sono corrette. Come scrive Boole: «Ogni sistema di interpretazione che non modifichi la verità delle relazioni che si suppone sussistano tra tali simboli è ugualmente ammissibile, ed è cosí che il medesimo processo può, secondo uno schema d'interpretazione, rappresentare la soluzione di una questione riguardante le proprietà dei numeri, secondo un altro schema quella di un problema di geometria, e, secondo un altro ancora, quella di un problema di dinamica o di ottica» [1847, trad. it. pp. 51-52]).

È possibile riassumere in una tabella (come si usa spesso fare oggi) le proprietà delle operazioni sugli enunciati (tab. 1). Va tenuto presente che i diversi autori usano una varietà di simboli diversi per indicare le operazioni $\vee$, $\wedge$ e $-$.

La colonna *a*) dice che $p \vee q$ è vero quando p è vero (V) e q è vero (V) (prima riga), quando p è falso (F) e q è vero (V) (seconda riga) e quando p è vero e q è falso (terza riga), mentre $p \vee q$ è falso quando p è falso e q è falso (quarta riga). Le colonne *b*) e *c*) si leggono in maniera analoga.

Servendosi di questi simboli è possibile scrivere immediatamente due leggi

Tabella 1.
Proprietà delle operazioni sugli enunciati.

Valore di verità		*Valore di verità*		
p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$-p$
V	V	V	V	F
F	V	V	F	V
V	F	V	F	
F	F	F	F	
		a)	*b*)	*c*)

fondamentali della logica antica: il principio del terzo escluso afferma semplicemente che $p \vee -p$ è valido (cioè, vero qualunque sia p) e il principio di contraddizione (in un'altra ancora delle sue forme) afferma che $p \wedge -p$ è una contraddizione (cioè, falso qualunque sia p).

Nella logica moderna è da lungo tempo invalso l'uso di analizzare 'Se p, allora q' come $\bar{p} \vee q$ – cioè, di considerare un «se ... allora» sempre vero tranne che nel caso in cui l'antecedente sia vero e il conseguente falso. Questa può essere una deviazione rispetto al «linguaggio ordinario» – anche se è difficile accertarsene, in quanto esistono teorie diverse della semantica del linguaggio ordinario – ma, in ogni caso, si tratta di una deviazione estremamente conveniente. Non è strettamente necessario avere una notazione separata per denotare 'Se p, allora q', ma sarebbe estremamente complicato farne a meno per analizzare i ragionamenti espressi nel linguaggio naturale. Per questo scopo si usa perciò il simbolo $p \supset q$ introdotto da Peano (molti scrittori usano il simbolo $p \rightarrow q$). Naturalmente, $p \supset q$ è la stessa cosa che $\bar{p} \vee q$.

La «tavola di verità» di $\supset$ è riportata nella tabella 2.

Si scrive anche $p \equiv q$ (e si legge: 'p se e solo se q') in luogo di $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$. Cosí, '$p \equiv q$ è vero esattamente quando p e q hanno lo stesso valore di verità'.

Per trattare il calcolo proposizionale come una delle forme dell'algebra booleana, s'interpreta V come un qualsiasi enunciato vero (ad esempio, '$1 = 1$') e $\varnothing$ come un qualsiasi enunciato falso (ad esempio, '$1 = 0$').

È facile verificare che le leggi dell'algebra booleana sono corrette rispetto a questa interpretazione in termini di «calcolo proposizionale». Ad esempio, $p \vee -p$ può anche essere scritto come $p \vee \bar{p} \equiv V$ e $-(p \wedge -p)$ come $p \wedge \bar{p} \equiv \varnothing$. Le proprietà distributive diventano

$$p(q \vee r) \equiv pq \vee pr$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

e le «proprietà di idempotenza»

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p.$$

Tabella 2.
Tavola di verità del connettivo «se ... allora».

Valore di verità		*Valore di verità*
p	q	$p \supset q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Valgono inoltre le leggi di De Morgan: $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$, $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$, e funziona lo «sviluppo»: p è equivalente a $pq \vee p\bar{q}$, a $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$, ecc.

In effetti, ogni formula *valida* dell'algebra booleana rimane valida quando le variabili vengono reinterpretate in modo che stiano per enunciati e le operazioni vengono reinterpretate come operazioni sugli enunciati, e, viceversa, se una formula valida della logica degli enunciati viene scritta sotto forma di «equazione» (cosa sempre possibile perché ogni formula F è equivalente a $F \equiv V$), allora la formula rimane valida quando si interpretano i simboli in termini di «classi».

Come si esprimono i *ragionamenti* nella logica degli enunciati? Si consideri la controparte enunciativa del sillogismo 'Tutti gli M sono P, Tutti gli S sono M, (dunque) Tutti gli S sono P', che è 'Se q, allora r, Se p, allora q, (dunque) Se p, allora r'. In simboli:

$$\begin{array}{c} q \supset r \\ p \supset q \\ \hline p \supset r \end{array} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{c} q\bar{r} \equiv \varnothing \\ p\bar{q} \equiv \varnothing \\ \hline p\bar{r} \equiv \varnothing \end{array}$$

Si verificherà ora la non-compatibilità della terna $q\bar{r} \equiv \varnothing$, $p\bar{q} \equiv \varnothing$, $p\bar{r} \equiv V$ (si osservi che è stata negata la conclusione scambiando $p\bar{r} \equiv \varnothing$ con $p\bar{r} \equiv V$). Si ha:

$$\begin{aligned} q\bar{r} &\equiv pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \\ p\bar{q} &\equiv p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \\ p\bar{r} &\equiv pq\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r}. \end{aligned}$$

Ora, $p\bar{r}$ è vero solo se $pq\bar{r}$ o $p\bar{q}\bar{r}$ sono veri. Ma le premesse dicono che $p\bar{q}$ e $q\bar{r}$ sono falsi, cosicché tutte le «regioni» che essi «contengono» devono pure essere false. In particolare, $pq\bar{r}$ e $p\bar{q}\bar{r}$ sono entrambi falsi se $p\bar{q}$ e $q\bar{r}$ sono falsi. La terna è dunque incompatibile, e il ragionamento è valido. Come si vede, è stata usata la stessa argomentazione adoperata nell'algebra delle classi.

In effetti, se si considerano soltanto equazioni (cioè, se si escludono premesse della forma $F \neq G$) allora un ragionamento le cui premesse e la cui conclusione siano di questa forma è valido nell'interpretazione in termini di «classi» dell'algebra booleana se e solo se il corrispondente ragionamento è valido nel «calcolo proposizionale». Il «calcolo proposizionale» e l'«algebra delle classi» non sono che due interpretazioni dello stesso calcolo.

La restrizione alle equazioni non costituisce una limitazione per la logica degli enunciati. Infatti, ogni formula F è equivalente a $F \equiv V$ e la disuguaglianza può essere espressa in forma positiva riscrivendo $F \not\equiv V$ come $F \equiv \varnothing$ e $F \not\equiv \varnothing$ come $F \equiv V$ dal momento che un enunciato può avere soltanto due valori, la *verità* o la *falsità*. Si noti però, che l'inferenza

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ q \wedge r \\ \hline p \wedge r \end{array} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{c} pq \equiv V \\ qr \equiv V \\ \hline pr \equiv V \end{array}$$

si trasforma in un'inferenza valida nell'algebra delle classi (perché $AB = V$ solo se $A = V$ e $B = V$), mentre l'inferenza *non-valida* nell'algebra delle classi

$$\begin{array}{c} AB \neq \varnothing \\ BC \neq \varnothing \\ \hline AC \neq \varnothing \end{array}$$

corrisponde a un'inferenza *valida* nel «calcolo proposizionale»:

$$\begin{array}{c} pq \not\equiv \varnothing \\ qr \not\equiv \varnothing \\ \hline pr \not\equiv \varnothing \end{array} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{array}{c} pq \\ qr \\ \hline pr \end{array}$$

Soltanto quando le premesse e le conclusioni del ragionamento dell'algebra delle classi sono *positive* (cioè, equazioni) la corrispondenza conserva la validità e la non-validità. Per questi ragionamenti, però, la corrispondenza è perfetta. Ogni ragionamento valido nella logica degli enunciati corrisponde a un ragionamento valido nell'algebra delle classi e ogni ragionamento valido nell'algebra delle classi corrisponde a un ragionamento valido nella logica degli enunciati.

5. *La logica degli enunciati: assiomi e notazione.*

La logica degli enunciati fece la sua prima comparsa nel periodo moderno come seconda interpretazione dell'algebra booleana («nel periodo moderno» perché gli antichi logici stoici avevano sviluppato la logica degli enunciati, e cosí pure avevano fatto, almeno in parte, alcuni logici medievali. Queste prime scoperte rimasero però a lungo dimenticate – sempre a causa dell'erronea credenza che la logica aristotelica fosse in linea di principio completa – cosicché la logica degli enunciati dovette essere riscoperta nel XIX secolo). In questo paragrafo verranno descritti alcuni altri modi di considerare la logica degli enunciati che sono molto importanti per i successivi sviluppi avvenuti nel XX secolo.

Il primo di questi altri approcci fu portato all'attenzione dei logici dall'italiano Peano [1888]. L'opera di Peano era stata totalmente anticipata, in una forma piú completa, da Frege, ma la notazione di Frege era cosí ingombrante ed oscura, almeno in apparenza, che la sua opera non venne apprezzata fino a quando la sua importanza non fu sottolineata da Russell nei *Principles of Mathematics* e nei *Principia Mathematica*. Lo stesso Russell apprese la notazione logica moderna da Peano, come si può dedurre dalle seguenti parole con cui Russell descrive il suo incontro con Peano al Congresso internazionale di filosofia di Parigi del 1900: «Durante le discussioni del congresso mi resi conto che era sempre piú preciso di tutti gli altri e che in tutte le discussioni risultava invariabilmente il piú brillante. Con il passare dei giorni mi convinsi che questo doveva dipendere dalla sua logica matematica e pertanto mi feci dare da lui tut-

te le sue opere e non appena il congresso si chiuse mi ritirai a Fernhurst per studiare in tutta tranquillità tutto ciò che lui e i suoi discepoli avevano scritto. Mi resi conto che il suo metodo di notazioni forniva quello strumento di analisi logica che per anni avevo cercato, e che studiando l'opera sua mi stavo impadronendo di una nuova e potente tecnica per il lavoro che da molto tempo desideravo fare» [1967, trad. it. pp. 236-37].

Ciò che Peano fece fu di rompere con la tradizione booleana di considerare la logica come un'algebra, e in particolare come algebra delle classi (o come interpretazione secondaria dell'algebra delle classi, nel caso della logica degli enunciati). Per Peano (e per Frege) la logica ha a che fare con la *formalizzazione del nostro linguaggio*. Il logico tenta di costruire un *linguaggio simbolico* (cfr. l'articolo «Formalizzazione» in questa stessa *Enciclopedia*), una notazione ideale, priva della vaghezza e dell'ambiguità che sono inevitabili nel linguaggio naturale, in cui tutte le dimostrazioni deduttive possano essere effettuate secondo delle regole esatte per la manipolazione dei simboli. In particolare, sia Peano sia Frege si ponevano l'obiettivo ideale di una *matematica puramente simbolica*, una matematica in cui *ogni riga di una dimostrazione*, dagli assiomi (che per Frege, anche se non per Peano, dovevano *essi stessi* essere formule della logica pura) fino alla conclusione, dovesse essere ottenuta dalle righe precedenti mediante regole rigorose per la trasformazione dei simboli – niente «appelli all'intuizione» – anche se sotto questo riguardo Peano aveva degli standard molto inferiori a quelli di Frege.

L'importanza di questo nuovo punto di vista non si manifesta in realtà tanto nella logica degli enunciati, quanto piuttosto nella logica del prim'ordine (che è discussa piú avanti) e nella teoria degli insiemi. Esso porta però con sé alcuni cambiamenti di notazione nella logica degli enunciati.

Si consideri un normale enunciato condizionale, ad esempio 'Se Maria è lontana, allora non può sostenere l'esame'. Un booleano lo tradurrebbe in simboli mediante $\bar{p} \vee \bar{q} \equiv V$ (usando p per 'Maria è lontana' e q per 'Maria può sostenere l'esame'). Meglio, poiché i booleani dell'Ottocento usavano + in luogo di $\vee$ e 1 in luogo di V (per mettere ancor piú in evidenza l'analogia algebrica), lo avrebbero in realtà scritto $\bar{p} + \bar{q} = 1$, che è ben lungi dal suggerire la forma sintattica di un enunciato condizionale. Peano, invece, seguiva piú da vicino il linguaggio reale: poiché 'Se p, allora q' non ha la forma di un'equazione, egli non la traduceva in simboli mediante un'equazione, ma, dopo aver introdotto il simbolo $\supset$ per denotare «se ... allora», scriveva l'enunciato particolare di cui sopra come si fa oggi, cioè 'Maria è lontana' $\supset$ –'Maria può sostenere l'esame', o $p \supset -q$. (Peano introdusse il simbolo $\vee$ per denotare 'o', il simbolo $\wedge$ per denotare 'e' e usava il simbolo – per denotare 'non').

Peano non era solo nel fare ciò: anche Peirce introdusse un simbolo per denotare il «se ... allora» e, inoltre, adottò la convenzione di scrivere $\bar{p} + \bar{q}$ come abbreviazione in luogo di $\bar{p} + \bar{q} = 1$. Ma per Peirce $\bar{p} + q$ (cioè, $\bar{p} \vee q$) e $p \prec q$ (cioè, $p \supset q$) erano soltanto delle abbreviazioni – la vera notazione, una volta eliminate tutte le abbreviazioni, è sempre *equazionale* –, mentre per Peano la forma *ultima* di una espressione può essere condizionale, disgiuntiva o congiuntiva, ecc., e l'insistenza nel far somigliare tutto all'algebra viene riconosciuta come un feticcio. (Ad esempio, il metodo decisionale per i ragionamenti della logica degli enunciati delineati piú sopra, e che consiste nello sviluppare le premesse e la conclusione in disgiunzioni di regioni fondamentali, non dipende affatto dallo scrivere le premesse e la conclusione come *equazioni*. Lo si è fatto soltanto perché le formule continuassero a corrispondere ad *asserti* una volta effettuata l'interpretazione in termini di classi. Quando si studia la logica degli enunciati di per se stessa, diventa del tutto artificioso scrivere tutti gli enunciati in questo modo).

Un secondo progresso nella logica degli enunciati, come d'altronde nella logica nel suo complesso, ebbe luogo con la pubblicazione dei *Principia Mathematica* [1910] di Russell e Whitehead. Anche se non è possibile descrivere in questo articolo la reale importanza di quest'opera, una sua caratteristica che influenzò anche la logica degli enunciati fu lo stile di presentazione assiomatico (nel fare ciò, Russell e Whitehead seguivano l'esempio di Frege). Russell e Whitehead non costruirono la logica degli enunciati come sistema separato, ma è facile farlo prendendo soltanto gli assiomi dei *Principia* che concernono questa parte della logica. Russell e Whitehead usano soltanto due simboli primitivi non-definiti, '$\sim$' (per la negazione) e '$\vee$' (per la disgiunzione). '$p \supset q$' è definito come abbreviazione di '$\sim p \vee q$'. Le regole di derivazione sono la sostituzione (di formule ben formate del sistema in luogo di 'p', 'q', ecc.) e la separazione (che da A e A$\supset$B permette di dedurre B). Fra gli assiomi dei *Principia* vi sono i seguenti:

1) $(p \vee p) \supset p$
2) $q \supset (p \vee q)$
3) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
4) $p \vee (q \vee r) .\supset. (p \vee q) \vee r$
5) $(q \supset r) .\supset. (p \vee q) \supset (p \vee r)$

(i puntini posti di fianco al simbolo '$\supset$' indicano che esso è il connettivo principale).

Dopo i *Principia* numerosi studiosi compirono considerevoli sforzi per ridurre il numero degli assiomi. Esistono sistemi di «calcolo proposizionale» con un unico simbolo primitivo (quello del connettivo «né ... né», mediante il quale si possono definire la congiunzione, la disgiunzione e la negazione) e sistemi con soltanto tre o quattro assiomi (o addirittura, vero *tour de force*, con *un* unico assioma). Oggi però la maggior parte di questi sistemi sono considerati dotati di uno scarso o nullo interesse matematico o filosofico. Gli assiomi dei *Principia* hanno il pregio di essere intuitivi, in quanto simbolizzano dei principî logici manifestamente importanti. Lo stesso si può dire per le regole di Gentzen. Se gli assiomi e le regole non simbolizzano principî logici importanti, non c'è in generale motivo per preoccuparsi di ridurne al minimo il numero.

Ulteriori progressi nel campo della logica degli enunciati ebbero luogo intorno al 1920 con l'invenzione delle tavole di verità da parte di Wittgenstein e,

Tabella 3.
Valore di verità di una formula.

Valore di verità			*Valore di verità*					
p	q	r	$p \supset (q \vee r)$	$.\supset.$	$(p \supset q)$	$\vee$	$(p \supset r)$	
V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V	V
			b)	*a*)	*f*)	*c*)	*e*)	*d*)

indipendentemente, dell'americano Emil Post. Nei precedenti paragrafi ci si è serviti delle loro tavole per chiarire i significati dei connettivi logici; Wittgenstein e Post le introdussero come metodo decisionale meno tedioso del metodo di «sviluppo» (anche se questa tecnica rimane importante in connessione con certi tipi di problemi decisionali, come ad esempio i ragionamenti nell'algebra delle classi che concernono delle disuguaglianze). Un esempio servirà a illustrare il metodo. Data una formula, ad esempio $p \supset (q \vee r) .\supset. (p \supset q) \vee (p \supset r)$, si calcola semplicemente il valore di verità di ciascuna delle sue sottoformule, e poi dell'intera formula, riga per riga, nel modo indicato nella tabella 3.

La colonna *a*) dà il valore di verità di $(q \vee r)$ in ciascuno dei casi. Cosí, il fatto che nella terza riga compaia una V significa che $(q \vee r)$ è vero quando p, q e r sono rispettivamente vero, falso e vero. Analogamente, le colonne *c*) e *d*) dànno i valori di verità di $(p \supset q)$ e di $(p \supset r)$ caso per caso. La colonna *b*) dà il valore di verità di $p \supset (q \vee r)$, che si calcola a partire dai valori di verità di $(q \vee r)$ e di p in ciascuna riga mediante la tavola di verità di $\supset$ data in precedenza. Analogamente, la colonna *e*) dà il valore di verità di $(p \supset q) \vee (p \supset r)$, che si calcola riga per riga a partire dai valori di verità dei due membri della disgiunzione $(p \supset q)$ e $(p \supset r)$. Infine, la colonna *f*) dà il valore di verità dell'intera formula. Poiché è vera in tutti gli otto casi possibili (che corrispondono ovviamente alle «regioni fondamentali» del metodo dello «sviluppo»), la formula è valida, cioè, nella terminologia un po' filosoficamente pesante di Wittgenstein, è una «tautologia».

6. *La logica del prim'ordine.*

L'ambizioso programma di Frege e di Peano era quello di escogitare una notazione simbolica e un insieme di regole che fossero adeguate per qualunque dimostrazione deduttiva, e in particolare per l'analisi delle dimostrazioni matematiche. L'algebra booleana, pur costituendo un grande progresso rispetto alla logica aristotelica, non giunse mai vicino all'obiettivo. Persino un'affermazione cosí semplice come 'Ogni numero possiede un successore' non può essere simbolizzata convenientemente né nell'algebra delle classi, né nel calcolo proposizionale. Fra il 1879 e il 1889, però, tre logici – Frege, Peirce e Peano – elaborarono indipendentemente una notazione adatta a simbolizzare *tutti* i ragionamenti deduttivi.

Le idee centrali erano due. La prima è quella di distinguere nettamente la forma logica di 'Tutti gli uomini sono mortali' dalla forma logica di 'Socrate è mortale'. Il primo enunciato è l'affermazione di un'inclusione di classi in quanto dice che la classe H degli uomini è un sottoinsieme della classe M dei mortali (in notazione moderna, $H \subset M$, o, in notazione booleana, $H\overline{M} = \varnothing$). Il secondo enunciato, invece, non è affatto l'affermazione di un'inclusione di classi, bensí l'affermazione di *appartenenza* a una classe. L'individuo Socrate non è una classe e ciò che l'enunciato dice *non* è che un insieme è un sottoinsieme di un altro, bensí che un individuo s è un *membro* dell'insieme M.

Frege, Peano e Peirce espressero tutti in simboli questo enunciato essenzialmente nello stesso modo: accostando un simbolo per l'individuo Socrate (ad esempio, 's') alla lettera predicativa M, cosí: M(s) (o talvolta M_s).

Frege fu spinto ad adottare questa notazione dall'analoga notazione usata in matematica per l'applicazione di una funzione a un argomento: egli pensava a $M(x)$ come a una funzione il cui valore in corrispondenza di un qualsiasi oggetto x è la Verità se x è mortale (o se possiede qualunque altra proprietà indicata da M) e la Falsità in caso contrario.

La seconda idea cruciale è quella di introdurre i quantificatori, cioè simboli per indicare che una formula A *vale per tutti i valori* di una variabile x e simboli per indicare che una formula A *vale per almeno un valore* di una variabile x. Oggi, seguendo Whitehead e Russell, si è soliti indicare che una formula è vera qualunque sia l'individuo assegnato come denotazione a x scrivendo '(x)' davanti alla formula e indicare che *qualche* individuo x del dominio (cioè, almeno uno) soddisfa alla formula scrivendo '$(\exists x)$' davanti ad essa. (Esistono tuttavia molte varianti a questa notazione). Cosí, se si scrive '$x = y + 1$' per 'x è il successore di y' e si prende come universo del discorso l'insieme dei numeri naturali, è possibile dire che ogni numero naturale possiede un successore scrivendo $(y)(\exists x)(x = y + 1)$.

La formula '$x = y + 1$' da sola dice che le cose indeterminate x e y stanno fra loro nella relazione: 'è il successore di' (il motivo per cui non si può esprimerla in simboli nell'algebra delle classi sta in parte nel fatto che si tratta di una relazione fra due cose e non di un semplice insieme di individui); $(\exists x)(x = y + 1)$ dice della cosa indeterminata y che qualche cosa (cioè, un qualche numero naturale) è il suo successore e $(y)(\exists x)(x = y + 1)$ dice che la precedente asserzione $(\exists x)(x = y + 1)$ è vera per ogni numero naturale y, cioè che ogni y possiede almeno un successore x.

Per illustrare il modo in cui viene usata questa notazione, si supponga che

Axy denoti la relazione 'ama', cioè che Axy dica che x ama y, o, per essere piú precisi, che 'Axy' sia vera quando si assegna una coppia di cose (a, b) alla coppia di simboli ('x', 'y') se e soltanto se la prima di queste cose ama la seconda (ad esempio, assegnare la coppia (Antonio, Cleopatra), in quest'ordine, ai simboli 'x', 'y' rende vera Axy, se si suppone che Antonio amasse veramente Cleopatra). Allora, $(x)(\exists y)$Axy dice che ognuno ama qualcuno (supponendo che l'universo del discorso sia costituito da persone) e $(\exists x)(y)$Axy dice che qualcuno ama ognuno. Infine, $(\exists x)(y)$A$xy \supset (x)(\exists y)Ayx$ dice che, se qualcuno ama ognuno, allora ognuno è amato da qualcuno, che è una formula valida, mentre $(x)(\exists y)$A$xy \supset (\exists x)(y)Axy$ dice che, se ognuno ama qualcuno (cioè, se per ogni x esiste un y – non necessariamente lo *stesso* – che x ama), allora esiste qualcuno che ama ognuno, che non è valida.

Si osservi che esiste una differenza significativa fra lo status di 'x' e lo status di 'y' nella formula $(\exists x)$Axy. Essa dice della cosa (persona) indeterminata y che qualche cosa (qualcuno) la ama. Una tale formula, che contiene, come si dice, la variabile *libera* 'y' (o una qualunque altra variabile), esprime la proprietà di y di *essere amata da qualcuno*. La variabile 'x', invece, stando dentro al quantificatore $(\exists x)$, non indica una «cosa indeterminata» come la variabile libera 'y' (piú precisamente, non possiamo pensare a questa 'x' come a un simbolo a cui si possa assegnare un oggetto come denotazione). Le variabili che compaiono all'interno dei quantificatori '(x)' e '$(\exists x)$' sono piuttosto dei mezzi per dire «ogni» e «qualche». Tali variabili sono dette legate.

Questo simbolismo sembra molto semplice, e in effetti con un po' di pratica è facile manipolarlo. Esso è però incomparabilmente piú ricco di tutta la logica precedente, antica e moderna, come si vedrà meglio nel paragrafo successivo.

Per ora, si osservi che Russell e Whitehead, oltre a dare degli assiomi per il calcolo proposizionale, diedero pure assiomi per la logica del prim'ordine (anche se il termine 'logica del prim'ordine' è dovuto a Peirce, e Russell e Whitehead la trattano soltanto come una parte del loro sistema totale, e non come un sistema separato). Qui essi seguono probabilmente Frege, perché né Peirce né Peano diedero un sistema completo di assiomi e di regole di derivazione. Fu Frege il primo a scrivere le regole di derivazione per quella che è essenzialmente *la* logica, cioè la teoria formale della deduzione quale è usata in tutte le scienze, compresa la matematica (cfr. l'articolo «Deduzione/prova» in questa stessa *Enciclopedia*).

Ecco uno di questi insiemi di assiomi e di regole (dovuto a Hilbert, ma molto simile alle regole di Frege del 1879): basta aggiungere agli assiomi del calcolo proposizionale i seguenti assiomi:

(1) (x)F$x \supset$Fy ('Se ogni cosa è F, allora y è F')
(2) F$y \supset (\exists x)$Fx ('Se y è F, allora qualche cosa è F')

e alle regole di separazione e di sostituzione (naturalmente, la sostituzione deve essere estesa alle lettere predicative e alle variabili quantificabili) le seguenti regole:

I) Da A$v \supset$B dedurre $(\exists v)$A$v \supset$B, se la variabile v non occorre libera in B (qui A e B sono due qualsiasi formule del sistema, e v può essere una qualsiasi delle variabili x, y, z, w, x', y', z', w', x'', ...)
II) Da B$\supset$Av dedurre B$\supset(v)$Av, se la variabile v non occorre libera in B.

La I) esprime il principio secondo cui, se si è stabilito che 'Se v è A, allora B' per un v arbitrario, allora si può concludere che 'Se qualche cosa è A, allora B'.

La II) esprime il principio secondo cui, se si è stabilito che 'Se B, allora v è A' per un v arbitrario, allora si può concludere che, 'Se B, allora ogni cosa è A'.

Si darà ora un esempio di deduzione in questo sistema (la deduzione verrà abbreviata partendo da casi particolari degli assiomi in cui sono già state effettuate delle sostituzioni, invece di scrivere gli assiomi nella forma data sopra ed effettuare esplicitamente le sostituzioni, e scrivendo semplicemente «calcolo proposizionale» di fianco a una riga che segue per funzione di verità dalle precedenti, invece di dare effettivamente la deduzione nel calcolo proposizionale):

a) (y)A$xy \supset$Axz	(sostituzione nell'assioma (1))
b) A$xz \supset (\exists x)$Axz	(sostituzione nell'assioma (2))
c) (y)A$xy \supset (\exists x)$Axz	(*a*), *b*), calcolo proposizionale)
d) (y)A$xy \supset (z)(\exists x)Axz$	(*c*), regola II))
e) (y)A$xy \supset (y)(\exists x)Axy$	(sostituzione della variabile legata 'z' in *d*) con 'y' per una delle regole di sostituzione; si noti che 'x' è libera nell'antecedente di *e*), ma non nel conseguente)
f) $(\exists x)(y)$A$xy \supset (y)(\exists x)Axy$	(*e*), regola I)).

Questa deduzione stabilisce il teorema $(\exists x)(y)$A$xy \supset (y)(\exists x)Axy$. Per un principiante è difficile scoprire le dimostrazioni in questo sistema e le regole, soprattutto quelle che stabiliscono le sostituzioni ammesse, sono estremamente complicate da formulare. Per questo motivo la maggior parte dei testi preferiscono oggi i sistemi del tipo «deduzione naturale» per cui si rinvia al § 1 dell'articolo «Formalizzazione» in questa stessa *Enciclopedia*.

7. *La «Begriffsschrift» di Frege.*

Sia Peano sia Frege volevano costruire una notazione simbolica atta a formalizzare le dimostrazioni di ogni ramo della matematica (e i ragionamenti deduttivi in generale). L'ambizione di Frege andava però molto al di là di questo. Negli anni 1880 Frege, come Russell e Whitehead vent'anni dopo, voleva dimostrare che tutti i cosiddetti *assiomi* della matematica potevano essere dedotti dai principî della logica pura, cioè che la matematica non è altro che logica travestita.

Sono le ricerche compiute da Frege per portare a compimento questo disegno che fecero della logica simbolica una grande disciplina. Anche se pochi matematici e filosofi ammetterebbero oggi che l'opera di Frege (completata poi da Russell e Whitehead) abbia fornito alla matematica la «fondazione» che Frege

sperava, non c'è alcun dubbio che essa diede origine a un'enorme *chiarificazione di concetti*. La natura dell'induzione matematica, i suoi rapporti con i principî della teoria degli insiemi, l'analisi dei legami fra l'aritmetica pura e le sue applicazioni sono tutti risultati dovuti a Frege. In aggiunta, gli spetta la priorità nella scoperta dei quantificatori e inoltre il livello di rigore con cui portò a termine tutte queste cose è altissimo. Perciò, la sua breve (non piú di 80 pagine) monografia *Begriffsschrift* (ideografia, o scrittura per concetti) [1879] è stata giustamente considerata la piú grande opera di logica scritta dopo Aristotele. La *Begriffsschrift* conteneva essenzialmente il sistema logico; l'analisi completa della matematica non apparve fino alla pubblicazione del primo volume dei *Grundgesetze der Arithmetik* [1893-1903] e prima che ne venisse pubblicato dieci anni dopo il secondo volume Russell aveva già scoperto una contraddizione, nota come paradosso di Russell, nella costruzione di Frege. La presenza di una tale contraddizione, che sarà eliminata dallo stesso Russell con la sua teoria dei tipi, non oscura, comunque, la grandezza dell'opera di Frege.

Il problema chiave che stava di fronte a Frege, cosí come in seguito a Russell, era la delucidazione del concetto di numero. (Russell, dopo aver incontrato Peano nel 1900, elaborò indipendentemente gran parte del sistema di Frege, accorgendosi soltanto in seguito che questi l'aveva preceduto). I testi tradizionali e gli scritti dei logici e dei filosofi dell'Ottocento rivelavano una grande confusione a tale proposito. Si diceva, ad esempio, che «uno» è un termine che si applica ad ogni «unità» (questo parlare di «unità» risale ad Aristotele) e che un'«unità» era «ogni cosa singola». Cosí, Cesare, la torre Eiffel e l'Europa sono tutti esempi di «uno» – in effetti, «uno» è un termine generale che si applica a *ogni cosa* – se si prende alla lettera questa teoria. «Due» era descritto come un termine che si applica a ogni coppia. Ma la distinzione fra la coppia – ad esempio, un paio di scarpe – considerata come oggetto fisico (anche se discontinuo) e la coppia considerata come *insieme* – l'insieme i cui membri sono le due scarpe – non veniva tracciata, né veniva fatta la distinzione fra l'applicare un predicato a un insieme e l'applicarlo a ciascuno dei suoi membri. Cosí, la fondamentale differenza di forma logica che sussiste fra 'Gli apostoli sono uomini' (che predica l'*essere un uomo* di ciascun apostolo) e 'Gli apostoli sono dodici' (che predica l'*essere dodici* dell'*insieme* degli apostoli) non veniva rilevata dalla maggior parte di questi logici pre-fregeani. Un'eccezione importante è costituita dal matematico Cantor, che nel 1878 aveva introdotto il concetto di «potenza» (cioè, di numero cardinale) di un aggregato e aveva dato il criterio per l'*equipotenza*: due aggregati hanno la stessa potenza quando e solo quando gli elementi dell'uno possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'altro. Cosí, il celebre risultato di Cantor del 1874, secondo cui i numeri reali non possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri interi dice, espresso con questa terminologia, che la potenza del continuo (cioè, dell'insieme dei numeri reali o, equivalentemente, dei punti della retta) è diversa dalla potenza dell'insieme dei numeri interi.

Cantor aveva anche definito che cosa significa per una potenza essere minore di un'altra. Il comportamento dei numeri cardinali finiti potrebbe indurci a pensare che una potenza possa essere definita minore di un'altra quando un insieme che abbia la prima potenza possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di un insieme che abbia la seconda potenza, ma questa definizione comporta delle difficoltà nel caso degli insiemi infiniti. L'esempio dei numeri pari e dei numeri interi mostra che un sottoinsieme proprio di un insieme infinito può avere la stessa potenza dell'intero insieme! (I numeri pari sono un sottoinsieme proprio dei numeri interi, ma la corrispondenza che manda ciascun numero pari nel numero che ne è la metà è biunivoca). La definizione di Cantor dice che, se la potenza di A è uguale alla potenza di un sottoinsieme di B, ma diversa da quella di B stesso, allora la potenza di A è minore della potenza di B. Con questa terminologia, si può dire che la potenza dell'insieme dei numeri interi (chiamata «aleph con zero» da Cantor) è minore della potenza del continuo: alcuni insiemi infiniti sono «piú infiniti» di altri!

Frege era un ammiratore di questa teoria di Cantor, ma pensava che richiedesse una fondazione logica precisa. E la nozione di numero di Frege, cosí come le sue critiche a chi parlava vagamente di «unità», ecc., sono in linea con le idee di Cantor.

Una caratteristica importante del sistema fregeano è il fatto che Frege interpretava le lettere predicative della logica come variabili sopra universali in intensione – cioè, «concetti», come li chiamava egli stesso – e non sopra insiemi o «classi», come in generale fanno i logici oggi. I «concetti» (*Begriffen*) non sono per Frege entità mentali, ma costituiscono piuttosto il *significato* o *contenuto* astratto e pubblico delle rappresentazioni che si usano. Che la rappresentazione di un pensiero sia un'immagine privata, o qualche altro particolare mentale, o un frammento di linguaggio pubblico, *ciò che essa significa* non può essere un particolare mentale perché altrimenti, come osserva Frege, due persone non penserebbero mai lo stesso pensiero. La logica, secondo Frege, è intensionale, cioè tratta di entità che non sono molto diverse, a quanto pare, dagli universali aristotelici.

Ora, *due*, applicato a un aggregato, è un «concetto» nel senso di Frege. Il concetto *due* – o *a due membri* – è un concetto che si applica alle *classi* e non agli individui, come si è già osservato. Perciò, l'estensione del concetto *due* è una *classe di classi*: in effetti, è la classe di tutte le classi a due membri. Che cos'è allora il numero due? Poiché, secondo l'opinione piuttosto sconcertante di Frege, i concetti non sono oggetti, mentre le classi lo sono, l'oggetto matematico *due* non può essere identificato con il concetto *due*, che è essenzialmente attributivo e non sostantivo, ma con la sua *estensione*. Nasce cosí la famosa definizione fregeana di numero: un numero è la classe di tutte le classi che hanno la stessa potenza (nel senso cantoriano) di una classe data. Due è la classe di tutte le classi a due membri.

Analogamente, *uno* è la classe di tutte le classi unitarie (le classi che hanno esattamente un membro sono dette «classi unitarie») e *zero* è la classe il cui unico membro è la classe vuota (esiste un'*unica* classe vuota, perché due classi sono distinte soltanto quando differiscono per almeno un membro).

Ora, il concetto *a zero membri* può essere definito nella logica pura, perché

equivale essenzialmente alla nozione logica di *nessuno*. Una classe F è a zero membri esattamente quando non ci sono F:

$$\text{F è a zero membri} =_{df} (x) - Fx$$

(dove $=_{df}$ significa «equivale per definizione a»).

Che dire però del concetto *a un membro*? Frege (e, sedici anni dopo, Russell) osservò che anch'esso può essere definito nell'ambito della logica pura (considerando come parte della logica la logica dell'*identità*, cioè della nozione «lo stesso oggetto di», denotato in simboli fin dai tempi antichi con il segno di uguaglianza '='. Anche i principî che regolano questo simbolo risalgono a molti secoli fa, come ad esempio quello secondo cui «cose uguali a una stessa cosa sono uguali fra loro» e quello secondo cui, qualunque sia P, se $x=y$, allora $Px \supset Py$, anche se non vennero completamente enumerati fino ai tempi moderni).

Una classe F possiede almeno un membro se *alcune* cose sono F:

$$\text{'Esiste almeno un F'} =_{df} (\exists x)Fx.$$

Una classe F possiede al piú un membro se qualunque x e y tali che Fx e Fy sono sempre uguali:

$$\text{'Esiste al piú un F'} =_{df} (x)(y)((Fx \wedge Fy) .\supset. x=y).$$

Infine, una classe F possiede esattamente un membro se valgono entrambe le condizioni precedenti, cioè:

$$\text{'F è a un membro'} =_{df} \text{'Esiste almeno un F'} \wedge \text{'Esiste al piú un F'}.$$

In notazione non abbreviata, la formula un po' complicata $(\exists x)Fx \wedge (x)(y)((Fx \wedge Fy) \supset x=y)$ dice che esiste esattamente *un F*. In questo modo, la nozione aritmetica «uno» è stata analizzata mediante le nozioni puramente logiche «alcuni» (cioè, $(\exists x)$), «tutti» (cioè, (x)), «se ... allora» e «è uguale a» ($=$). Analogamente, è possibile esprimere mediante una formula logica il fatto che esistono almeno due F scrivendo:

$$\text{'Esistono almeno due F'} =_{df} (\exists x)(\exists y)(Fx \wedge Fy \wedge x \neq y)$$

dove $x \neq y$ è un'abbreviazione di $-(x=y)$ e $Fx \wedge Fy \wedge x \neq y$ dovrebbe in realtà essere scritta in una delle due forme $(Fx \wedge Fy) \wedge x \neq y$ oppure $Fx \wedge (Fy \wedge x \neq y)$ che, per la proprietà associativa della congiunzione $(p \wedge q) \wedge r .\equiv. p \wedge (q \wedge r)$, sono equivalenti.

Si può esprimere il fatto che esistono al piú due F nel modo seguente:

$$\text{'Esistono al piú due F'} =_{df} (x)(y)(z)(FxFyFz .\supset. x=y \vee x=z \vee y=z),$$

dove $FxFyFz$ è un'abbreviazione di $((Fx \wedge Fy) \wedge Fz)$. La congiunzione 'Esistono al piú due F' $\wedge$ 'Esistono almeno due F' (o, meglio, la congiunzione delle due corrispondenti formule logiche) è allora una formula logica che esprime la nozione aritmetica «F è a due membri». *Ogni numero cardinale finito* – o, meglio, la corrispondente proprietà delle classi – può essere espresso in modo analogo

mediante una formula del prim'ordine del «calcolo dei predicati con identità».

Finora è stato dimostrato (mediante esempi) come si possa esprimere ogni cardinale finito preso in esame come un «concetto», cioè come un predicato di classi. È possibile anche esprimere la definizione dell'«oggetto matematico» corrispondente, cioè *la classe di tutte le classi a un membro, la classe di tutte le classi a due membri*, e cosí via, ma questo comporta la necessità di andare al di là della logica del prim'ordine, ed è qui che Frege fece bancarotta.

Introducendo i quantificatori, Frege *non* pensava all'universo del discorso come a un qualche cosa di relativo (cioè, di variabile con il discorso che veniva formalizzato), come facevano Boole, Peirce e altri booleani. Egli aveva invece in mente che i quantificatori (x) e $(\exists x)$ dovessero variare sopra *tutti gli oggetti* – e in effetti in Frege è presente l'ipotesi dell'*esistenza* di una tale totalità definita di *tutti gli oggetti* – compresi quindi gli oggetti matematici (cioè, le «classi»). In particolare, mentre le variabili individuali della «logica del prim'ordine» di Peirce non variano mai sopra *classi* (a meno che il discorso che viene formalizzato concerna delle classi, nel qual caso *non* si suppone che classi arbitrarie delle classi particolari che formano il dominio V appartengano esse stesse a V), nella logica della *Begriffsschrift* di Frege – che verrà chiamata *logica ingenua* – 'Per tutti gli x' significa 'Per tutti gli oggetti', *dove le classi arbitrarie di oggetti sono considerate esse stesse oggetti*. Alcuni esempi varranno ad illustrare il significato e l'importanza di questo punto.

Si consideri la formula della logica del prim'ordine $(x)Fx \supset (\exists x)Fx$ ('Se ogni cosa è F, allora qualche cosa è F'). Se si vuol dire che questa formula è vera per tutte le classi (o predicati) F, basta scrivere

(1) $\quad (F)((x)Fx \supset (\exists x)Fx),$

ma allora non si è piú all'interno della «logica del prim'ordine». La formula (1), contenente un quantificatore che varia sopra le classi, appartiene piuttosto a quella che Peirce chiamava *logica del second'ordine*. D'altro lato, se si traduce la logica ingenua (*Begriffsschrift*) nella notazione precedente, allora non soltanto una formula del second'ordine come la (1) sarebbe una formula ben formata della logica ingenua, ma tale sarebbe pure la formula

(2) $\quad (x)Fx \supset F(F),$

che Peirce avrebbe considerato totalmente priva di senso!

Si noti che la (2) dice: 'Se ogni cosa è F, allora F è F'. Questo sarebbe *vero* secondo Frege, perché «ogni cosa» comprende non soltanto tutti gli individui, ma anche tutte le *classi*, mentre non sarebbe ben formata secondo Peirce e i logici moderni, perché 'F' non può occorrere in posizione di argomento né nella logica del prim'ordine *né* nella logica del second'ordine.

L'attrattiva della logica ingenua sta naturalmente nel fatto che si possono formare le classi con grande libertà. Cosí, se si vuol dire nella notazione della logica ingenua che il numero uno esiste – cioè, che esiste la classe di *tutte* le classi a un membro – si può semplicemente scrivere:

(3) $\quad (\exists F)(G)(F(G) \equiv G$ *è a un membro*$)$

(dove 'G è a un membro' è già stato definito in notazione puramente logica). La (3), tuttavia, contiene la variabile predicativa G in posizione di argomento, il che fa sí che la (3) sia una formula della logica *ingenua* e non della logica del primo o del second'ordine.

Anche se furono proprio queste caratteristiche della *Begriffsschrift* o della logica ingenua che dir si voglia – e cioè, il fatto che essa ammetta le variabili predicative in posizione di argomento e che accetti la (2) – a causarne la non-coerenza, si vedrà nel paragrafo successivo come il sistema di Frege poté essere ricostruito da Russell e Whitehead in modo da evitare la contraddizione.

Prima, però, si riassumerà il resto degli sbalorditivi risultati ottenuti da Frege.

'F è a un membro', 'F è a due membri', ecc. sono stati definiti all'interno della logica pura (le definizioni sono state date nell'ambito della logica del prim'ordine, sistema che sappiamo essere coerente). Una conseguenza di questo fatto è che ora è possibile rianalizzare alcune semplici inferenze concernenti i numeri in termini puramente logici. Si consideri l'enunciato

(4) $2+2=4$.

Esso è strettamente connesso con l'inferenza

(5) 'F è a due membri'
'G è a due membri'
$FG=\varnothing$

(dunque) '$F\cup G$ è a quattro membri'

come si può verificare con una semplice riflessione sulla nozione '+'.

La (5), però, può essere scritta nell'ambito della logica pura del prim'ordine con identità: è sufficiente impiegare la definizione data sopra di 'F è a due membri', scrivere $FG=\varnothing$ nella notazione della logica del prim'ordine come $(x)-(Fx\wedge Gx)$, aggiungere la premessa $(x)(Hx .\equiv. Fx\vee Gx)$, che dice che H è uguale a $F\cup G$, e scrivere la conclusione come 'H è a quattro membri'. Quest'ultima può essere tradotta in notazione puramente logica nel modo indicato sopra.

Cosí, l'inferenza

(6) 'F è a due membri'
'G è a due membri'
$(x)-(Fx\wedge Gx)$
$(x)(Hx .\equiv. Fx\vee Gx)$

'H è a quattro membri'

è (una volta sostituite le espressioni definite con le loro definizioni) un'inferenza della logica del prim'ordine con identità. Inoltre, la conclusione può essere dedotta dalle premesse servendosi delle semplici regole e degli assiomi della

logica del prim'ordine, piú gli assiomi per l'identità '='. È stato cosí dimostrato che un enunciato matematico ($2+2=4$) esprime quello che si riduce a essere un fatto di pura logica. Infatti, che differenza di contenuto intuitivo c'è, dopo tutto, fra $2+2=4$ e 'Per tutte le classi F, G, H, se F e G non hanno nessun membro in comune, e se H è l'unione di F e G, e se F ha due membri e G ha due membri, allora H ha quattro membri?' Quest'ultimo enunciato non è forse un'analisi di che cosa significhi per quattro essere la *somma* di due e due?

Kant, nel XVIII secolo, aveva tracciato una netta distinzione fra enunciati quali $5+7=12$, che sosteneva essere sintetici, e gli enunciati della logica pura, che sosteneva essere analitici. Dopo l'opera di Frege, non è stato piú possibile marcare una linea di confine netta fra matematica e logica – né ci sarebbe nessun reale costrutto nel farlo.

Non soltanto è possibile analizzare nozioni numeriche particolari come *uno*, *due*, ... in termini logici, e dire che i numeri uno, due, ... esistono, che quattro è la somma di due e due, ecc., ma Frege dimostrò anche che la proprietà di essere un numero cardinale finito o infinito, cioè, una «potenza» nel senso di Cantor, può essere definita nell'ambito della logica pura. In effetti:

'F è una potenza' $=_{df}(\exists H)(G)(F(G) .\equiv.$ *G è simile a H*$)$

('F è una potenza' se e solo se, per qualche H, F è la classe di tutte le classi simili a H), dove la similarità è definita cosí:

'G è simile a H' $=_{df}(\exists R)(R$ *è uno-uno* $\wedge$ *Il dominio di R è G* $\wedge$ *Il codominio di R è H*$)$,

supponendo di aver dato le seguenti definizioni:

a) 'R è uno-uno' $=_{df}(x)(y)(z)(Rxy Rxz .\supset. y=z)$
b) 'Il dominio di R è G' $=_{df}(x)(Gx\equiv(\exists y)Rxy)$
c) 'Il codominio di R è H' $=_{df}(x)(Hx\equiv(\exists y)Ryx)$.

Si noti che la *similarità* (cioè, il poter essere messa in corrispondenza uno-uno) è una relazione *del second'ordine* fra classi perché è necessario un quantificatore del second'ordine $(\exists R)$ per esprimerla, ed *essere una potenza*, come *essere il numero uno*, richiede per essere espressa (con questa definizione) la logica ingenua, perché 'F(G)' contiene una lettera predicativa in posizione di argomento.

La cosa piú importante fatta da Frege in questa parte della sua opera è, tuttavia, l'aver mostrato come si possa definire il concetto *essere un numero intero* in termini puramente logici. L'idea che sta dietro a questa definizione fu elaborata anche da Dedekind, ma nove anni dopo i *Grundgesetze der Arithmetik* e tredici anni dopo la *Begriffsschrift* (che contiene l'idea essenziale, quella di antenato di una relazione).

Il problema di definire l'antenato di una relazione può essere illustrato servendosi dell'esempio che gli ha dato il nome: la relazione di *antenato*. Indicando con **Pxy** la relazione '*x* è un genitore di *y*', 'P' può essere pensata de-

notare la classe di tutte le coppie ordinate (x, y) tali che il primo membro sia un genitore del secondo membro. Usando il simbolo Axy per denotare la relazione 'x è un antenato di y', 'A' denota la classe di tutte le coppie ordinate tali che il primo membro sia un antenato del secondo membro. Che relazione c'è fra P e A?

Evidentemente $P \subset A$ (P è inclusa in A), cioè, per tutti gli x e y, $Pxy \supset Axy$. Sembra però che la relazione sia piú forte di questa. In effetti, «antenato» può essere definito in termini di «genitore» nel modo seguente:

(7) Axy se e solo se esiste una successione finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, tale che $x = x_1$, $y = x_n$ e $P(x_i, x_{i+1})$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Questa definizione è piú matematica che logica, in quanto usa la nozione, non spiegata finora, di «successione finita» e altre nozioni matematiche (come, ad esempio, «$i+1$»). È possibile definire «antenato» in termini di «genitore» *usando soltanto notazioni logiche*?

La risposta è sí. Il primo passo consiste nell'osservare che il prodotto relativo di *antenato di* e di *genitore di*, cioè la relazione *antenato di un genitore*, è essa stessa inclusa nella relazione *antenato*. Occorre definire prima queste nozioni: se R_1, R_2 sono due relazioni (binarie), allora il prodotto relativo di R_1 e R_2 (si indica con $R_1|R_2$) è la relazione che intercorre fra x e y quando x sta nella relazione R_1 con qualcosa che sta nella relazione R_2 con y. In simboli:

$$(R_1|R_2)xy =_{df} (\exists z)(R_1(x, z) \wedge R_2(z, y)).$$

Ad esempio, se R_1 è la relazione *fratello di* e R_2 è la relazione *genitore di*, allora il prodotto relativo $R_1|R_2$ è la relazione *fratello di un genitore di*, cioè, *zio di*.

Se R_1, R_2 sono due relazioni, l'inclusione relazionale è cosí definita:

$$R_1 \subset R_2 =_{df} (x)(y)(R_1(x, y) \supset R_2(x, y)).$$

Cosí, *madre di* è inclusa in *genitore di*, perché per tutti gli x e y: 'x è madre di $y \supset x$ è un genitore di y'.

Finora si è affermato che A (*antenato di*) possiede le due seguenti proprietà (dove P è *genitore di*):

(I) $P \subset A$

(II) $A|P \subset A$.

In effetti, A è la piú piccola relazione che soddisfa alle proprietà (I) e (II). Infatti, sia R una qualsiasi relazione tale che $P \subset R$ e $R|P \subset R$. Allora, anche P^2 (cioè, $P|P$, o *nonno di*) è inclusa in R, perché $P \subset R$ implica $P|F \subset R|F$ per ogni F (questo ragionamento è stato reso famoso dal contemporaneo di Boole De Morgan), cosicché $P \subset R$ implica $P|P \subset R|P$ e, poiché $R|P \subset R$, segue che $P|P \subset R$, cioè $P^2 \subset R$, come si era detto.

Si può però andare oltre. Poiché $P^2 \subset R$, segue che $P^2|P \subset R|P$, e, servendosi ancora una volta del fatto che $R|P \subset R$, se ne conclude che $P^2|P \subset R$, cioè $P^3 \subset R$ (P^3, naturalmente, è la relazione *bisnonno di*). In maniera analoga si pro-

va che $P^4 \subset R$, $P^5 \subset R$, ... Ma, per ogni *particolare* coppia x, y, se Axy, allora, per qualche n, $P^n(x, y)$, perché x è un antenato di y solo se x è il genitore di y, o x è il nonno di y, o x è il bisnonno di y, o ... E, per ogni n, $P^n \subset R$. Perciò, poiché $P^n(x, y)$ vale per qualche n e $P^n \subset R$, vale Rxy. Ne segue che $Axy \supset Rxy$. Poiché x e y erano arbitrari, ne segue che $(x)(y)(Axy \supset Rxy)$, cioè $A \subset R$.

Si vede cosí che A è inclusa in ogni relazione R che soddisfi alle due condizioni precedenti. Poiché A stessa vi soddisfa, segue che A è (come si era detto) la piú piccola relazione che soddisfa alle condizioni (I) e (II).

A questo punto si potrebbe in effetti definire A in termini di P dicendo, nel simbolismo qui adottato, che A è «la piú piccola relazione che soddisfa alle condizioni (I) e (II)». Questa definizione non sarebbe però soddisfacente, perché la dimostrazione data del fatto che esista una relazione che soddisfi alle condizioni (I) e (II) e che sia la piú piccola era piú matematica che logica. Fondamentalmente, ci si è serviti del fatto che A è l'unione delle infinite relazioni P, P^2, P^3, P^4, ... e si è anche invocata la nozione di numero intero nel parlare di 'P^n' per n variabile. Il problema consiste nel dimostrare con metodi *logici* e non matematici che esiste una piú piccola relazione che soddisfa alle condizioni (I) e (II).

Il metodo di Frege consiste nel definire A nel modo seguente (a parole, prima):

'x è un antenato di y' $=_{df}$ 'Per ogni relazione R, se R soddisfa alle condizioni (I) e (II) allora Rxy'.

In conclusione, i miei antenati sono esattamente le entità che stanno con me in ogni relazione R tale che $P \subset R$ e $R|P \subset R$. In simboli, ora:

$$Axy =_{df} (R)(P \subset R \wedge R|P \subset R \;.\supset.\; Rxy).$$

Si noti che la definizione di A in termini di P è del second'ordine, per la presenza del quantificatore (R). Si può dimostrare che ciò è inevitabile, cioè che «antenato» non può essere definito in termini di «genitore» nel linguaggio del *prim'ordine*.

Con la definizione data sopra, non c'è nessuna difficoltà nel dimostrare che la relazione A esiste, in quanto Axy, cioè 'x è un antenato di y' è stato esplicitamente definito come una semplice abbreviazione di $(R)(P \subset R \wedge R|P \subset R \;.\supset.\; Rxy)$. E neppure è difficile dimostrare che A, definita nel modo che si è detto, gode delle proprietà indicate. Ad esempio, se Pxy, cioè se x è un genitore di y, allora è ovvio che x sta con y in ogni relazione R che include la relazione *genitore di*. Perciò, a maggior ragione, x sta con y in ogni relazione R tale che $P \subset R \wedge R|P \subset R$, cioè, $(R)(P \subset R \wedge R|P \subset R \;.\supset.\; Rxy)$. Poiché questo è Axy, ne segue che

(I) $P \subset A$.

In maniera analoga si può dimostrare che

(II) $A|P \subset A$.

(Il ragionamento consiste nell'osservare che, se esiste uno z tale che x stia con z in ogni relazione R tale che $P \subset R \wedge R|P \subset R$ e z stia con y nella relazione P, allora, per ogni tale R, x sta con y nella relazione $R|P$ (per la definizione del prodotto relativo '|'). Perciò, x sta con y in ogni relazione R di questo tipo, in quanto tutte queste R sono tali che $R|P \subset R$, e ciò equivale a dire che Axy).

La relazione A cosí definita soddisfa quindi alle condizioni (I) e (II). Inoltre, A è la *piú piccola* relazione che gode di queste proprietà, perché è definita come l'*intersezione* di tutte le relazioni che godono di tali proprietà. Si è cosí potuto dimostrare con mezzi puramente logici che esiste la piú piccola relazione che gode delle proprietà (I) e (II).

Volendo usare questa definizione di «antenato» nella vita di tutti i giorni, bisogna anche essere in grado di dimostrare le inferenze citate sopra secondo cui «tutti i nonni sono antenati», «tutti i bisnonni sono antenati», ecc. (cioè, $P^2 \subset A$, $P^3 \subset A$, ...) Ma, per la proprietà (I), $P \subset A$, cosicché, per l'inferenza di De Morgan ('Se $F \subset G$, allora $F|R \subset G|R$'), $P^2 \subset A|P$, che è $\subset$ A per la proprietà (II). Ne segue che $P^2 \subset A$ e, ancora per l'inferenza di De Morgan, $P^3 = P^2|P \subset A|P \subset A$.

In questo modo Frege poté dimostrare che *tutte* le proprietà della relazione *antenato di* seguono dalla sua definizione (espressa in quella che oggi si chiama «logica del second'ordine») in termini di *genitore di*.

Nello stesso modo, se F è una qualsiasi relazione, si può definire a partire da F un'altra relazione F*, detta relazione ancestrale di F, esattamente nello stesso modo in cui è stato definito *antenato* a partire da genitore: $F^*(x,y) =_{df} (R)(F \subset R \wedge R|F \subset R \,.\supset.\, Rxy)$, che coincide esattamente con l'unione delle relazioni F, F^2, F^3, F^4, ..., cioè, è la relazione in cui x sta con y quando x può essere congiunto a y da una *catena finita* di oggetti tali che ciascuno stia nella relazione F con il successivo. In effetti, l'idea usata da Frege per definire la relazione ancestrale fu usata in seguito da Dedekind per definire la nozione di «catena».

Si è definito in precedenza 'F è una potenza' (cioè, F è un cardinale finito o infinito) in termini puramente logici. Si potrebbe però pensare che, anche se *questa* nozione può essere definita nell'ambito della logica pura, sia però necessario far ricorso all'aritmetica per definire la nozione di «potenza» *finita*, cioè, di numero intero. Armato della sua definizione di relazione ancestrale, Frege fu in grado di provare che le cose non stanno cosí: anche *numero intero* può essere definito in termini puramente logici. La catena di definizioni è la seguente:

I) 'F proviene da G per addizione di un elemento' $=_{df} (\exists x)(-Gx \wedge (z)(Fz \,.\equiv.\, Gz \vee z = x))$

('Esiste qualche cosa che non è in G e che è tale che, per ogni z, z è in F se e solo se z è in G oppure è uguale a quella cosa').

II) $S(F,G) =_{df} (\exists A)(\exists B)(F(A) \wedge G(B) \wedge$ *A proviene da B per addizione di un elemento*)

(Questa definizione è data in modo da coincidere con l'operazione intuitiva di «addizione di un elemento» quando F e G sono potenze. In questo caso S(F, G) può essere letto come 'F è il successore di G').

III) 'F è zero' $=_{df} (H)(F(H) \equiv$ *H è a zero membri*)

(Cosí, zero è la classe di tutte le classi vuote, cioè, poiché esiste un'unica classe vuota, zero è la classe unitaria contenente la classe vuota).

IV) 'F è un numero intero' $=_{df}$ *F è zero* $\vee (\exists G)($*G è zero* $\wedge S^*(F,G))$.

S^* è la relazione ancestrale della relazione S («successore»). In breve, essere un numero intero significa essere zero oppure stare con zero nella relazione ancestrale della relazione di successore.

Un'altra forma della stessa definizione è la seguente: essere un numero intero significa appartenere a ogni classe che abbia come membro zero e che sia chiusa rispetto alla relazione *successore di*. In simboli:

V) 'F è un numero intero' $=_{df} (G)(G(o) \wedge (H)(H')(G(H') \wedge S(H,H') \,.\supset.\, G(H)) :\supset: G(F))$.

A partire da questa definizione si può dimostrare, *usando soltanto la logica*, che:

1) o è un numero intero.
2) Se H è un numero intero, anche il suo successore è un numero intero.
3) Per ogni G, se o appartiene a G e G è «ereditaria» (cioè, per ogni H appartenente a G, anche il successore H' di H appartiene a G), allora ogni numero intero appartiene a G (principio di induzione matematica).

In effetti, una volta che si siano definiti opportunamente *piú* e *per*, *tutti gli assiomi dell'aritmetica diventano teoremi logici*. In questo modo Frege riuscí a dimostrare che l'aritmetica – e quindi anche l'analisi, perché le ricerche di Weierstrass e di altri consentono di estendere questi risultati alla teoria dei numeri reali – altro non sono che logica travestita. Ma ci riuscí veramente? Si esamineranno fra poco alcune delle difficoltà che si presentano. Qualunque sia il verdetto finale sulla rilevanza filosofica dell'opera di Frege, non bisogna però perdere di vista l'originalità, per non dire l'audacia, delle sue ricerche. Inoltre, molte di esse conservano un valore duraturo, anche se non forniscono, come Frege aveva sperato prima della comparsa del paradosso di Russell, una «fondazione per l'aritmetica». La nozione di relazione ancestrale, ad esempio, introduce una tecnica che è ancor oggi usata diffusamente nella teoria degli insiemi. La scoperta del fatto che l'induzione matematica è un principio del second'ordine (in simboli: $(G)(G(o) \wedge (H)(H')(G(H') \wedge S(H,H') \,.\supset.\, G(H)) :\supset: (F)$ (*F è un numero intero* $\supset G(F))$) è pure molto importante – anche oggi succede di trovare degli autori che non si rendono conto che il principio *completo* d'induzione matematica non può essere enunciato nell'aritmetica del prim'ordine. Un *frammento* del principio può essere espresso mediante uno

schema di assiomi del prim'ordine, cioè, mediante una lista infinita di assiomi, ma l'«aritmetica del prim'ordine» non è *tutta* l'aritmetica proprio perché *non* contiene tutta l'induzione matematica. L'aritmetica *completa* è inseparabile dalla teoria degli insiemi (o, alternativamente, dalla logica di ordine superiore), come Frege per primo si rese conto. Fra tutti i contributi concettuali di questa parte dell'opera di Frege, però, i due che conservano forse il valore piú duraturo sono: 1) come contributo alla matematica, l'analisi di ciò che significa per una classe essere *finita* (perché a questo si riducono in definitiva le definizioni di relazione ancestrale e di *numero intero*); e 2) come contributo alla filosofia, la *stretta connessione* da lui stabilita – anche se non l'identità, come Frege credeva – fra logica e matematica. Il verdetto pronunziato da Russell trent'anni dopo secondo cui non sarebbe mai piú stato possibile tracciare un confine non arbitrario fra matematica e logica si è rivelato del tutto esatto.

8. *La crisi dei fondamenti di Frege: il paradosso di Russell.*

Si è dedotto che la relazione *antenato di* esiste dal fatto che è possibile definirla; l'estensione della relazione *antenato di* è l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) tali che x e y soddisfino alla seguente condizione: $(R)(P \subset R \wedge R|P \subset R \supset Rxy)$. Nel fare ciò, è stato tacitamente assunto il principio che gli studiosi di teoria degli insiemi chiamano assioma di comprensione, il quale afferma che una «condizione» particolare, cioè una formula con variabili libere (in questo caso x e y) determina un *insieme* o *classe* (precisamente, l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) che soddisfano alla condizione). Questo principio fu trasformato da Frege in una *regola* generale, secondo cui per *ogni* condizione esprimibile nel sistema logico esiste una classe corrispondente. Ciò sembra, in effetti, molto «evidente». Infatti, che cosa s'*intende* per «classe» o «insieme» se non «estensione di un predicato»? Come potrebbe quindi esistere un predicato *senza che ci sia* la classe delle cose che lo soddisfano?

Nel 1901, tuttavia, Russell diede un semplice esempio che dimostra come l'assunzione secondo cui *ogni* condizione (esprimibile nel sistema) determina una classe conduca a una contraddizione. Infatti, una delle cose che si possono dire nel sistema di Frege è che una classe F non contiene se stessa: $-F(F)$ (a rigore, questo significa che il *concetto* F non si applica alla propria estensione, secondo l'interpretazione che Frege dava del proprio simbolismo, ma ciò non altera la questione). Se *questa* condizione determina una classe – cioè, se esiste una classe Z contenente *esattamente* quelle F tali che F non appartiene a F –, la classe Z appartiene a se stessa oppure no? Entrambe le ipotesi conducono a una contraddizione! L'ipotesi che esista una tale classe deve perciò essere abbandonata.

In simboli, la condizione che definisce Z è $(F)(Z(F) \equiv -F(F))$, da cui si ottiene, sostituendo Z come caso particolare di F, $Z(Z) \equiv -Z(Z)$, che è una contraddizione.

Questa scoperta fu una catastrofe per il sistema di Frege. Se l'assioma di

comprensione senza limitazioni è contraddittorio, da che cosa potrà essere sostituito? Quale principio può dire *quali* sono le condizioni che determinano degli insiemi (o, nella terminologia di Frege, quali «concetti» hanno come estensioni delle «classi») e quali no? Frege scrisse a Russell il 22 giugno 1902:

«La scoperta da parte vostra della contraddizione ha provocato in me la piú grande sorpresa e, direi quasi, costernazione in quanto ha scosso le basi stesse sulle quali intendevo costruire l'aritmetica. Sembra quindi che... la mia Regola V sia falsa, e che le mie spiegazioni contenute nel § 31 non siano sufficienti ad assicurare che le mie combinazioni di segni abbiano in ogni caso un significato. Devo riflettere piú a lungo su questa questione. Essa è tanto piú grave perché, con la perdita della mia Regola V, sembra scomparire non soltanto la fondazione della mia aritmetica, ma anche l'unica fondazione possibile dell'aritmetica. Ritengo tuttavia che dovrebbe essere possibile determinare delle condizioni... tali che i punti essenziali della mia dimostrazione rimangano intatti. In ogni caso la vostra scoperta è molto notevole e, nonostante a prima vista possa apparire importuna, essa produrrà probabilmente un grande progresso nella logica» [cfr. Heijenoort 1967, pp. 127-28].

In breve, tutta la brillante costruzione che consentiva di ridurre l'aritmetica alla logica veniva messa in dubbio dalla scoperta di Russell. Poco tempo prima erano stati scoperti altri paradossi nella teoria degli insiemi (anche se la loro importanza per l'opera di Frege non era stata rilevata), in particolare il paradosso di Burali-Forti (concernente la nozione di «numero ordinale della successione di tutti gli ordinali») e il paradosso del «cardinale piú grande di tutti», ma con la scoperta del semplice e devastante «paradosso di Russell» la situazione diventò intollerabile, non soltanto per Frege, ma anche per i seguaci di Cantor. La «teoria degli insiemi» cantoriana verrà discussa nel prossimo paragrafo; fu lo stesso Russell, aiutato da Whitehead (che aveva già pubblicato *Universal Algebras* [1898], contenente un lungo capitolo in cui viene discussa la logica matematica lungo le linee booleane), che si dedicò al compito di riparare il sistema fregeano (la maggior parte del quale, compresa la definizione di numero naturale, era stata scoperta indipendentemente da Russell nel 1900-1901). Russell fece una cosa molto complicata e qui verrà descritta soltanto la successiva semplificazione della sua opera data da Ramsey. Nella forma semplificata, l'idea di Russell – la teoria dei tipi – consiste nell'abbandonare due delle assunzioni di principio che stanno alla base dell'opera di Frege:

1) L'assunzione che esista un singolo e definito universo di tutti gli oggetti, compresi gli oggetti matematici, viene lasciata cadere. In cambio, Russell postulò l'esistenza di una serie di universi o «tipi»: un universo di tutti gli «individui», che non contiene quindi classi, o «concetti», o «proprietà», ecc. Questo universo di base viene detto «tipo zero»; un universo di tutte le classi di individui, che viene detto «tipo uno», e, continuando allo stesso modo, un universo, detto *tipo* $n+1$, di tutte le classi di oggetti di tipo n. Quanto al formalismo, '(x)' significa 'Per tutti gli *individui* x', e non 'Per tutti gli oggetti, compresi gli oggetti astratti'; '(F^1)' significa 'Per tutte le classi di individui', e non 'Per tutte le classi qualsiasi'; '(F^2)' significa 'Per tutte le classi di classi

di individui'; '(F^3)' significa 'Per tutte le classi di classi di classi di individui', ecc. Cosí, la formula che serve per derivare il paradosso di Russell

(1) $(F)(Z(F) \equiv -F(F))$

non è ben formata perché F non può prendere se stessa come argomento, qualunque tipo di apice le si apponga, e 'Z' richiede l'apice di tipo '2' (o uno in piú di quello che viene assegnato a 'F') per poter prendere come argomento una variabile di classe di tipo uno. Inoltre, anche se la (1) *fosse* ben formata, essa non implicherebbe

(2) $Z(Z) \equiv -Z(Z)$

perché a 'Z' nella (1) bisogna assegnare almeno il tipo 2 e a 'F' bisogna assegnare un tipo inferiore di un'unità a quello di 'Z'. Perciò la sostituzione di 'F' con 'Z' è impossibile: 'Z' non denota un oggetto dell'«universo» (o tipo) su cui varia 'F'.

2) L'assunzione che ogni condizione determina una classe viene modificata in quella secondo cui le condizioni sugli oggetti di un determinato tipo determinano una classe del tipo immediatamente successivo.

L'effetto sulla «derivazione fregeana della matematica dalla logica» è immediato. Non esiste piú un'unica «classe di tutte le classi con due membri». C'è invece una «classe di tutte le classi di tipo 1 con due membri». Questo è «il numero due di tipo 2». Esiste una «classe di tutte le classi di tipo 2 con due membri». Questo è «il numero due di tipo 3», ecc. Di tutti i numeri (e degli altri oggetti matematici, compresa la classe vuota) esiste una copia in ciascun tipo. Naturalmente, un teorema aritmetico quale $2+2=4$ è vero qualunque sia il tipo che si assegna a 2 e a 4 e perciò si possono tralasciare gli apici quando si scrivono questi ordinari enunciati matematici (questa eliminazione degli apici quando la formula è vera per tutti i tipi sufficientemente grandi è detta da Russell «ambiguità tipica»).

Questa duplicazione infinita di tutti gli oggetti matematici (infiniti numeri zero, infiniti numeri uno, infiniti numeri due, ... uno per ciascun tipo) è una conseguenza *spiacevole* della stratificazione in tipi degli oggetti del discorso. Tuttavia, *è* possibile portare a termine una versione convenientemente modificata del ragionamento di Frege e derivare tutti gli assiomi della teoria dei numeri nella teoria dei tipi quasi esattamente come aveva fatto Frege. C'è un unico inconveniente.

L'inconveniente è questo. Si supponga che l'universo degli individui sia finito, ad esempio che esistano soltanto un milione di individui. Allora, non esistono classi di tipo uno con un milione e un membri. Perciò, il numero un milione e uno (cioè, la classe di tutte le classi con un milione e un membri) è identico alla classe vuota di tipo due. Lo stesso accade, per il medesimo motivo, per il numero un milione e due. L'enunciato 'Un milione e uno è diverso da un milione e due' sarà perciò falso nel tipo 2 e 'Ogni numero ha un successore diverso dal numero stesso' sarà falso in *ogni* tipo (perché, se il tipo o è finito, tale è pure ogni altro tipo in quanto, se vi sono n oggetti di tipo k, allora vi sono soltanto 2^n classi di tali oggetti ed esse sono tutti gli oggetti di tipo $k+1$).

In breve, se si vuole che $(x)(x \neq x+1)$ sia *vero*, bisogna postulare che *esistono infiniti individui*. Russell *lo postulò* (è quello che si chiama l'assioma dell'infinito della teoria dei tipi), ma è difficile sostenere che si tratti di un principio della *logica* pura.

(Non si discuterà qui un altro degli assiomi di Russell che pone delle difficoltà – l'assioma di riducibilità – perché la versione ramseyana della teoria che si sta discutendo ne fa a meno).

Non soltanto Russell aveva bisogno per «derivare la matematica» di un principio (l'assioma dell'infinito) che non è un principio della logica pura, ma l'intera costruzione non appare ora piú *sicura*, per non dir di peggio, della stessa matematica. Quando il termine 'logica' viene esteso in modo tale da coprire l'intera teoria dei tipi, diventa assai dubbio che la «riduzione della matematica alla logica» risolva alcun problema *epistemologico*. Tuttavia, l'importanza *matematica* dell'opera di Frege e di Russell e Whitehead non deve essere sottovalutata. Al termine delle loro ricerche erano stati scoperti *a*) un modo coerente (per quanto se ne sa) di sviluppare la teoria degli insiemi, e quindi di formalizzare tutta la matematica, comprese l'analisi, la topologia, ecc.; *b*) un'analisi del concetto di «insieme finito» (è questa la realizzazione di Frege, e anche di Dedekind, descritta nella sezione precedente); *c*) un'analisi del significato dei termini matematici (ad esempio, 'dodici') quando compaiono negli enunciati empirici ('Ci sono dodici apostoli'): dal punto di vista filosofico, questo è uno dei contributi piú importanti del «logicismo», come viene chiamata la tendenza di Frege-Russell-Whitehead; e *d*) la scoperta dello stretto legame esistente fra il principio d'induzione matematica e gli assiomi sull'esistenza delle classi. Anche se non riuscirono a scoprire la *pietra filosofale* – la «fondazione della matematica» –, la ricerca di questa fondazione condusse questi tre grandi logici a scoperte logico-matematiche di valore imperituro. Durante questo processo, inoltre, essi diedero alla logica un'esaltazione, un fascino, un impulso che stimolarono immensamente la ricerca nell'ambito di questa disciplina per molti anni a venire.

9. *La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.*

È stato già ricordato che, negli stessi anni in cui Frege sviluppava i suoi «fondamenti dell'aritmetica», Cantor stava elaborando la «teoria degli insiemi» (*Mengenlehre*). Cantor era conscio del pericolo dei paradossi – è anche possibile che egli abbia anticipato il paradosso di Russell – ma, a differenza di Frege e di Russell, non vedeva la necessità di uno strumento *rigoroso* per evitare le contraddizioni. Il suo atteggiamento era quello secondo cui *alcune* condizioni determinano degli insiemi e altre no. Una condizione che determina un insieme ha come estensione una «molteplicità coerente»; una condizione che non determina un insieme ha come estensione una «molteplicità non-coe-

rente». In particolare, Cantor pensava che non potesse esistere una cosa come l'insieme di tutti gli insiemi e perciò nella sua teoria degli insiemi non c'è un «insieme universale» («tutti gli insiemi» costituiscono una «molteplicità non-coerente»). In pratica, questo atteggiamento lascia all'intuizione del singolo matematico il compito di decidere quando sia possibile raccogliere i membri di una «molteplicità» in un «insieme» (cioè, in una classe) e quando invece non lo sia. Quando, dopo il 1902, si diffuse la conoscenza del paradosso di Russell, questo atteggiamento non risultò piú accettabile.

Fu il matematico Zermelo che effettuò una formalizzazione della teoria cantoriana degli insiemi, e lo fece con una tale efficacia che oggi sono la teoria degli insiemi di Zermelo e le sue numerose estensioni che costituiscono la formalizzazione canonica della matematica, e non la teoria dei tipi di Russell-Ramsey. Zermelo presentò le sue idee in uno stile relativamente formalistico – «ecco una lista di assiomi che vi forniranno tutto ciò di cui ha bisogno il teorico degli insiemi senza condurre a contraddizioni, per quanto si possa dire» [1907, p. 261] sono, in effetti, le sue parole – ma alla base della sua lista di assiomi c'è un chiaro modello intuitivo, anche se egli stesso lo indicò in un lavoro soltanto molti anni dopo la pubblicazione degli assiomi. E questo modello intuitivo non è poi *cosí* lontano dalla teoria dei tipi. Si supponga di pensare al tipo base come costituito soltanto dall'insieme vuoto (o dall'insieme di tutti gli *Urelemente*, o individui, come in una successiva versione della teoria). Questo tipo viene detto «rango zero». Si supponga poi che i tipi (o «ranghi», come sono detti oggi nel contesto della teoria degli insiemi di stile zermeliano) siano cumulativi, cioè che ogni elemento del rango n appartenga anche a tutti i ranghi superiori. In particolare, si assuma che esista *un unico* insieme vuoto: l'insieme vuoto di rango 0 appartiene automaticamente a tutti i ranghi superiori e quindi non c'è nessun bisogno di avere un oggetto diverso che serva da «insieme vuoto di rango n» per $n>0$. Analogamente, esiste *un unico* «insieme unitario dell'insieme vuoto» (ed esso appartiene a ogni rango superiore al rango 0), *un unico* «insieme unitario dell'insieme unitario dell'insieme vuoto» (ed esso appartiene a ogni rango superiore al rango 1), ecc. Successivamente, *si estendano i ranghi al transfinito*, cioè si supponga che esistano un rango ω (ω è il «primo ordinale infinito» nella teoria cantoriana degli insiemi), un rango $\omega+1$, ecc. I ranghi possono essere definiti induttivamente:

1) Il rango 0 è l'insieme unitario dell'insieme vuoto.
2) Se il rango α è definito per un qualsiasi ordinale cantoriano α, allora il rango $\alpha+1$ è l'insieme potenza (l'insieme di tutti i sottoinsiemi) del rango α.
3) Se λ è un ordinale limite (cioè, un ordinale infinito privo di un immediato predecessore, come ω), allora il rango λ è l'unione di tutti i ranghi inferiori a λ. Ad esempio, il rango ω è l'insieme di tutti gli insiemi di rango finito.

Si osservi che la (2) dice che il rango $\alpha+1$ è ottenuto dal rango α allo stesso modo in cui nella teoria dei tipi il tipo $n+1$ è ottenuto dal tipo n (eccetto

che nella «teoria dei ranghi» insiemi con gli stessi membri vengono identificati anche quando appartengono a ranghi diversi, come è stato già osservato, mentre insiemi appartenenti a tipi diversi *non* vengono identificati nella teoria dei tipi nemmeno quando sono costituiti dagli stessi membri). In questo senso, la «teoria dei ranghi» non è altro che una teoria dei tipi cumulativa estesa al transfinito.

La grande differenza fra la teoria zermeliana degli insiemi e la teoria dei tipi non sta tanto nel modello che si ha in mente (in fondo, vi sono molti modi per estendere la teoria dei tipi di Russell-Ramsey al transfinito), ma nel *linguaggio*. Il linguaggio di Russell-Whitehead, nella formulazione semplificata di Ramsey, ha dei quantificatori distinti per ogni tipo. Non si può dire 'Per tutte le entità x' o 'Esiste un x tale che', ma bisogna invece *specificare sempre un tipo* e scrivere, ad esempio, '(x^{17})' ('Per tutte le entità x di tipo 17') o '$(\exists x^{17})$' ('Esiste un'entità x di tipo 17'). Russell, in sintesi, restringe sia l'ontologia (esistono soltanto gli insiemi che appartengono a un qualche tipo) sia il linguaggio (si può quantificare soltanto su un tipo alla volta). Zermelo, al contrario, *restringe l'ontologia ma non il linguaggio*. Esistono soltanto gli insiemi che appartengono a un qualche rango, ma i quantificatori variano sopra *tutte* le entità (cioè, i quantificatori sono '(x)' e '$(\exists x)$', senza apici di tipo o di rango, e non '(x^{17})' e '$(\exists x^{17})$', ecc.). C'è poi un'altra differenza collegata a questa: mentre nella teoria dei tipi il simbolo $\in$ (che sta per «appartiene a») può occorrere soltanto fra variabili di tipi consecutivi (ad esempio, '$x^3 \in x^4$' è ben formata nella teoria dei tipi, mentre '$y^4 \in x^3$' non lo è, cioè è sgrammaticata), nella teoria zermeliana degli insiemi non vi sono apici di rango, e quindi '$x \in y$' e perfino '$x \in x$' sono *sempre* ben formate.

In particolare, mentre la condizione '$-x \in x$' che genera il paradosso non è ben formata nella teoria dei tipi, essa è ben formata nella teoria zermeliana degli insiemi. In questo sistema *ha senso* dire che 'x non appartiene a se stesso' ($-x \in x$), soltanto che non esiste l'*insieme* di tutti gli x che soddisfano a questa sensata condizione (come in effetti dimostra il ragionamento di Russell).

Ripetendo: Russell pensava che si dovessero restringere sia l'ontologia sia il linguaggio per evitare le contraddizioni della teoria degli insiemi; Zermelo scoprí che è soltanto necessario restringere l'ontologia (cioè, gli assiomi dicono quali insiemi *esistono*); il linguaggio può essere il linguaggio della «teoria degli insiemi del prim'ordine», cioè, la logica del prim'ordine con le variabili che variano sopra «tutti gli insiemi» (o su di essi piú gli «individui») e l'unico predicato extralogico è il predicato $\in$ dell'appartenenza. Naturalmente, questo non è altro che il linguaggio della «logica ingenua», tradotto dalla notazione della *Begriffsschrift* in notazione moderna. Perciò, non era il *linguaggio*, ma l'*ontologia* della «logica ingenua» che causava i paradossi.

Anche se la nozione di rango è fondamentale per il modello intuitivo su cui è basata la teoria zermeliana degli insiemi, Zermelo non usa affatto *esplicitamente* questa nozione. I suoi assiomi possono essere riassunti nel modo seguente (non se ne dà qui una lista completa, ma la raccolta di Heijenoort [1967] contiene i lavori originali di Zermelo e dei suoi successori):

1) Esiste un insieme vuoto.
2) Per ogni insieme x, esiste l'insieme potenza (l'insieme di tutti i *sottoinsiemi* di x).
3) Se x è un insieme e P è una «proprietà definita» (cfr. oltre), allora esiste l'insieme di tutti gli insiemi z che godono della proprietà P e che sono membri di x (assioma di selezione).
4) Esiste un insieme infinito. (In effetti, esiste un insieme che contiene l'insieme vuoto e che è chiuso rispetto alla formazione dell'insieme potenza).

Viene inoltre assunto l'assioma di estensionalità (il quale dice che x e y sono uguali se e solo se hanno gli stessi membri. In simboli: $x=y \equiv (z)(z \in x \equiv z \in y)$). Infine, vi sono degli assiomi tecnici che assicurano l'esistenza dell'unione $x \cup y$ e dell'insieme-coppia $\{x, y\}$ per tutti gli insiemi x, y e un assioma (l'assioma di fondazione) il quale dice che ogni insieme ha un membro disgiunto dall'insieme stesso (il contenuto intuitivo di questo assioma è che, se si parte da un insieme x e si «discende» scegliendone un membro, e poi un membro di quel membro, e cosí via, allora dopo un numero finito di passi si esce fuori dall'insieme). L'assioma della scelta di Zermelo – cioè, il principio secondo cui, dato un qualsiasi insieme di insiemi non vuoti, esiste una «funzione di scelta» che estrae un membro da ciascuno degli insiemi non vuoti dell'insieme dato – è un ulteriore assioma opzionale (cfr. l'articolo «Deduzione/prova» in questa stessa *Enciclopedia*). L'esistenza dell'intersezione $x \cap y$ di due insiemi x, y può essere dimostrata mediante l'assioma di selezione 3) applicato a x, prendendo come «proprietà definita» quella di *appartenere a y*. Tuttavia, un insieme x non ha mai un *complementare*. Infatti, se esistesse l'insieme $\bar{x}$ di tutte le entità che non appartengono a x, allora esisterebbe anche l'unione $x \cup \bar{x} = V$, ed esisterebbe quindi l'«insieme di tutti gli insiemi». Perciò, la totalità di tutti gli insiemi non costituisce un'algebra di Boole, perché non è chiuso rispetto alla complementazione e non esiste V. Per ogni *insieme x* esiste però, per l'assioma 3), il complementare di ogni membro y di *x rispetto a x*, cioè l'insieme di tutti i membri di x che non appartengono a y.

Questi assiomi possono essere scritti facilmente nel linguaggio della teoria degli insiemi del prim'ordine. L'unico problema sta nel fatto che Zermelo non dice con precisione quali sono le «proprietà definite» dell'assioma 3). Seguendo un suggerimento dovuto a Skolem, questo assioma – l'assioma di selezione (*Aussonderung*) – fu precisato prendendo come «proprietà definite» esattamente ***quelle che possono essere espresse nella notazione descritta***. In breve, «proprietà definita» significa «proprietà della teoria degli insiemi del prim'ordine». Con questa convenzione, l'assioma 3) diventa una lista infinita di assiomi, uno per ciascuna formula ben formata $P(z)$, per ognuna delle quali

$$3') \quad (x)(\exists w)(z)(z \in w \;.\equiv.\; z \in x \wedge P(z))$$

è preso come assioma, cioè come caso particolare dello «schema di assiomi di selezione» (purché siano soddisfatte certe restrizioni tecniche sulla scelta delle variabili della formula $P(z)$). Si vede cosí che i casi particolari dello schema

di assiomi 3') esprimono collettivamente quello che s'è detto: esiste l'insieme di tutti quei membri di x che hanno la proprietà P, per ogni x e per ogni P esprimibile nel linguaggio stesso.

Un ulteriore assioma venne proposto nel 1922 da Fraenkel e anche (indipendentemente) da Skolem: l'immagine di un insieme rispetto a un'applicazione biunivoca (nozione che può essere definita nella teoria degli insiemi del prim'ordine) è anch'essa un insieme. L'effetto di questo assioma può essere descritto in vari modi: uno dei modi possibili è quello di osservare che questo assioma – il cosiddetto assioma di rimpiazzamento – afferma che l'*unico* caso in cui una collezione di insiemi definibile nel linguaggio della teoria degli insiemi del prim'ordine può *non* essere un insieme è quello in cui ha una cardinalità troppo grande. Ogni «molteplicità» che abbia la stessa cardinalità o «potenza» di un insieme è essa stessa un insieme (questo concorda con le idee informali di Cantor sulla differenza fra «molteplicità coerenti» e «molteplicità non-coerenti»). Un altro modo è quello di notare che questo assioma afferma che se un numero ordinale è rappresentato nell'universo degli insiemi, nel senso che esiste un insieme i cui membri possono essere ordinati secondo un buon ordinamento il cui tipo d'ordine coincide con l'ordinale dato, allora la gerarchia dei ranghi può essere estesa nel transfinito fino a quel numero ordinale. Mentre gli assiomi di Zermelo sono abbastanza forti da dimostrare l'esistenza di ranghi maggiori del primo ordinale infinito ω, essi non sono però sufficienti per provare l'esistenza di un rango come il rango 2ω; tuttavia, aggiungendo l'assioma di rimpiazzamento, è possibile dimostrare l'esistenza di ranghi il cui ordinale è infinito non-numerabile. In effetti, per ogni ordinale α la cui esistenza può essere provata nella teoria degli insiemi, è possibile dimostrare l'esistenza del rango α, una volta assunto l'assioma di rimpiazzamento. Da questo punto di vista, l'assioma di rimpiazzamento è una specie di «assioma dell'infinito forte», in quanto il suo effetto è quello di garantire l'esistenza di insiemi infiniti molto grandi. Oggi l'aggiunta di assiomi dell'infinito ancora piú forti è oggetto di accese discussioni nella comunità dei teorici degli insiemi.

10. *I risultati della logica moderna.*

Con lo sviluppo della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e con la sua formalizzazione nell'ambito della logica del prim'ordine sembra aver termine, almeno per il momento, il grande periodo della costruzione dei sistemi nella logica moderna. Ogni tanto vengono ancora proposti altri sistemi (ancora oggi si studia, ad esempio, un sistema chiamato *New Foundations* proposto da Quine nel 1937) e vengono anche fatti tentativi di formalizzare parti del discorso diverse dal discorso matematico, ma il fatto è che l'attenzione dei logici si è spostata dalla costruzione di nuovi sistemi di logica matematica per rivolgersi verso ricerche matematiche piú profonde su quelli a disposizione, in particolare sulla teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel e sulle sue estensioni. I risultati di queste ricerche sono stati profondi, cosí profondi che è stato creato tutto

un nuovo campo della matematica. Anche soltanto una descrizione sommaria di tutti questi campi richiederebbe un lavoro molto piú lungo del presente, ma nessun resoconto della logica moderna può fare a meno di citare almeno alcuni dei risultati piú importanti di questo periodo, che fu preannunziato dal teorema di Löwenheim (1915), ma che si può dire abbia avuto veramente inizio soltanto con la tesi di dottorato di Gödel sulla completezza della logica del prim'ordine (1930).

L'articolo «Deduzione/prova» descrive una delle realizzazioni della logica moderna quando parla della «tesi di Hilbert». La costruzione della logica del prim'ordine costituiva, come si rese conto Hilbert, la prima analisi riuscita del concetto intuitivo di *deduzione* qual è impiegato nella scienza deduttiva, la matematica stessa, piú altamente sviluppata. Questo risultato è illuminato dalle profonde ricerche matematiche di Löwenheim e di Gödel.

Löwenheim conosceva la logica del prim'ordine dagli scritti di Peirce, di cui seguiva la notazione e la terminologia. Per Löwenheim, che in ciò seguiva Peirce, l'universo del discorso della logica del prim'ordine era un universo *relativo, dipendente*, cioè, *dal discorso che viene formalizzato*. (Per Frege, si ricordi, l'universo è assoluto: esso è sempre la totalità di «tutti gli oggetti», compresi quelli matematici). Il fatto che l'universo per lui fosse relativo rese possibile a Löwenheim porsi un problema che non sarebbe mai venuto in mente a Frege: gli infiniti superiori nel senso di Cantor, gli infiniti non-numerabili, hanno una qualche influenza sulla logica del prim'ordine? Per essere piú precisi, *esistono formule della logica del prim'ordine che possono essere soddisfatte in un universo non-numerabile, ma non in uno numerabile?*

Questo problema, benché formulato in termini altamente matematici («infinito numerabile» e «infinito non-numerabile»), apre in realtà un campo di ricerche di grande importanza filosofica. Si consideri una formula della logica del prim'ordine, ad esempio: $(\exists x)(\exists y)(Fx \wedge \bar{F}y)$. Questa formula è detta *soddisfacibile* se esistono un universo non vuoto V e un'interpretazione della lettera 'F' rispetto a quell'universo in cui la formula diventa *vera*. In altre parole, la formula è soddisfacibile quando esistono un universo non vuoto V e una sottoclasse F di V tali che l'enunciato 'Esistono x, y tali che x appartiene a F e y non appartiene a F' sia vera. In effetti, la formula precedente non è soddisfacibile in un universo con un elemento, mentre lo è in qualsiasi universo con almeno due elementi, come si vede facilmente. Analogamente, per ogni n, si può costruire una formula che non sia soddisfacibile in nessun universo con n elementi, ma che lo sia in qualsiasi universo con almeno $n+1$ elementi.

È possibile anche costruire una formula che non sia soddisfacibile in nessun universo *finito*, ma che lo sia in un universo *infinito*. Di questa proprietà gode

$$R \text{ è transitiva} \wedge R \text{ non è riflessiva} \wedge (x)(\exists y)Rxy$$

(dove 'R è transitiva' è un'abbreviazione di '$(x)(y)(z)(Rxy\,Ryz \supset Rxz)$' e 'R non è riflessiva' è un'abbreviazione di '$(x)-Rxx$'). Non è però possibile trovare una formula che non sia soddisfacibile in nessun universo infinito numerabile, ma che lo sia in un universo infinito non-numerabile. In effetti, Löwenheim dimostrò qualche cosa di piú: dato un qualsiasi universo non-numerabile V e data un'interpretazione delle lettere predicative rispetto a cui una formula (o un intero insieme di formule, cioè una *teoria* formalizzata) diventa vera, esiste sempre un sottoinsieme numerabile V′ dell'universo originale V tale che la formula sia vera in V′ rispetto alla stessa interpretazione che la rendeva vera in V (restringendo l'interpretazione a V′ nel modo ovvio; ad esempio, se una lettera predicativa sta per un insieme di coppie ordinate di V nell'interpretazione originale, allora essa starà per lo stesso insieme di coppie *meno* le coppie che contengono qualche cosa che appartiene a $V-V'$ nella restrizione dell'interpretazione originale a V′). Un universo V insieme con un'interpretazione delle lettere predicative di una formula o di un insieme di formule rispetto a V viene detto *struttura*; una struttura che rende vera una formula viene detta *modello*. Anche se lo studio sistematico dei modelli delle formule e delle teorie del prim'ordine non fu iniziato come sottodisciplina distinta all'interno della logica matematica con il nome di teoria dei modelli fino agli anni '40, il teorema di Löwenheim può esser considerato la vera origine della disciplina.

Skolem semplificò in seguito la dimostrazione di Löwenheim e dimostrò anche che il teorema (tranne l'informazione che l'interpretazione numerabile può essere sempre costruita come restrizione dell'interpretazione originale a una parte numerabile dell'universo originale) può essere provato senza far ricorso all'assioma della scelta. Per questo motivo, il teorema di Löwenheim viene oggi citato usualmente come «teorema di Löwenheim-Skolem».

Il teorema di Löwenheim è un teorema della teoria dei modelli *pura*, cioè, esso presuppone il concetto di *interpretazione* di una formula rispetto a un universo (relativo) del discorso, ma non il concetto di *regola d'inferenza*. In effetti, Löwenheim non fa riferimento a nessuna *assiomatizzazione* della logica del prim'ordine: il lavoro di Peirce che cita contiene soltanto le *notazioni* e non le regole di deduzione. All'epoca in cui Gödel scriveva la sua tesi di dottorato le regole di deduzione erano state pubblicate nei *Principia Mathematica* sotto una forma piú accessibile di quella della *Begriffsschrift* di Frege. Gödel fu cosí condotto a porsi il problema che si rivelò fondamentale per la teoria dei modelli: ogni insieme coerente di formule possiede un modello?

Qui «insieme coerente» di formule significa che non se ne può derivare una contraddizione servendosi delle regole dei *Principia*. Cosí, la *coerenza* è una nozione della teoria della dimostrazione e non della teoria dei modelli. Il problema di Gödel collegava cosí per la prima volta la teoria dei modelli e la teoria della dimostrazione. (La teoria della dimostrazione – cioè, lo studio matematico delle dimostrazioni come oggetti combinatori finiti – fu creata da Hilbert). Gödel rispose in senso affermativo alla domanda che si era posto: la nozione sintattica di «coerenza» coincide esattamente con la nozione di soddisfacibilità della teoria dei modelli. Particolarizzando il risultato di Gödel al caso in cui l'insieme contiene un'unica formula, lo si può formulare sinteticamente cosí: *una formula della logica del prim'ordine è coerente se e solo se è soddisfacibile*.

Un'altra formulazione del risultato di Gödel è la seguente: una formula è *valida*, cioè vera rispetto a *tutte* le interpretazioni in *tutti* gli universi non vuoti,

se e solo se può essere dimostrata nel sistema. In altre parole, il sistema è *completo*. Come è stato osservato in «Deduzione/prova», la completezza della logica del prim'ordine è uno dei motivi della «plausibilità» della «tesi di Hilbert», che afferma che la dimostrabilità nella logica del prim'ordine traduce esattamente la nozione di *deduzione*. Il teorema precedente è detto «teorema di completezza di Gödel» e non deve essere confuso con il «teorema d'incompletezza di Gödel» che verrà discusso fra poco (quest'ultimo viene spesso citato semplicemente come «*il* teorema di Gödel»).

Questi due teoremi sulla logica del prim'ordine – quello che afferma che la validità coincide con la validità nel numerabile (teorema di Löwenheim) e quello che afferma che la validità coincide con la dimostrabilità (teorema di completezza di Gödel) – sono i teoremi fondamentali, ma c'è un terzo teorema che merita di essere citato per le sue molteplici applicazioni in teoria dei modelli. Esso fu dimostrato nella tesi di Gödel come passo preliminare per la dimostrazione della completezza ed è oggi noto come teorema di compattezza. Esso afferma che un insieme *infinito* di formule possiede un modello se e solo se ogni suo sottoinsieme finito ne possiede uno.

Una formula, o un insieme di formule, della logica del prim'ordine è detta *categorica* in una potenza (numero cardinale) se tutti i modelli della formula in un universo che abbia quella potenza sono isomorfi. Esistono degli insiemi di formule che non sono categorici nella potenza «aleph con zero» (cioè, non tutti i modelli numerabili dell'insieme sono isomorfi), ma che sono categorici nella potenza del continuo. Un teorema molto importante di teoria dei modelli, che fu dimostrato soltanto negli anni '60, è il teorema di Morley, il quale afferma che, se una teoria è categorica in una *qualsiasi* potenza non-numerabile, allora è categorica in *ogni* potenza non-numerabile. Questo teorema, la cui dimostrazione è di straordinaria difficoltà, illustra il permanente interesse per la teoria dei modelli della logica pura del prim'ordine.

Molte applicazioni di questi risultati della teoria dei modelli sono state fatte nel campo della teoria degli insiemi e in altre parti della matematica. Una di queste applicazioni – l'«analisi non-standard» – sarà descritta piú avanti.

Poiché la logica del prim'ordine è completa, il problema che si poneva naturalmente come oggetto di successivo studio era: i *Principia Mathematica* (cioè, la teoria dei tipi) sono completi?

Questa domanda può essere intesa nel modo seguente: è possibile dimostrare nell'ambito dei *Principia* ogni enunciato che sia vero rispetto all'interpretazione che si ha in mente dei *Principia*? Gödel, tuttavia, trovò una versione del problema in questione che può essere formulata nell'ambito della teoria pura della dimostrazione. Se i *Principia* sono completi nel senso semantico ora detto, allora, poiché ogni formula priva di variabili libere di qualunque tipo (ogni formula «chiusa») deve essere o vera o falsa nell'interpretazione data, è necessario che, per ogni coppia A, —A formata da una formula chiusa e dalla sua negazione, almeno uno (e, assumendo la coerenza del sistema, soltanto uno) dei membri della coppia sia un *teorema* dei *Principia*. Di conseguenza, si è convenuto di dire che un sistema è *completo in senso sintattico* se ogni enunciato

(formula chiusa) del sistema è *decidibile* nel sistema, cioè, o esso o la sua negazione sono un teorema. I *Principia* sono completi in senso sintattico?

Poiché contiene soltanto concetti sintattici (come ad esempio «dimostrabile»; si osservi che il problema, cosí riformulato, è un problema concernente i *Principia Mathematica* in quanto calcolo privo d'interpretazione), questa domanda appartiene alla teoria della dimostrazione nel senso di Hilbert.

Gödel (con grave disappunto da parte di alcuni e somma gioia da parte di altri) rispose a questa domanda in senso negativo. In effetti, dimostrò che *nessun* sistema coerente e completo sufficientemente forte da esprimere la teoria dei numeri interi può possedere un sistema ricorsivo di assiomi. Poiché gli unici insiemi di assiomi che possono essere dati da una procedura effettiva che consenta di decidere se una formula appartenga o non appartenga all'insieme sono gli insiemi ricorsivi, un insieme *non* ricorsivo di assiomi non costituirebbe una «formalizzazione» accettabile. Perciò, ciò che fu dimostrato da Gödel è che *la totalità delle verità matematiche, anche soltanto nell'ambito della teoria elementare dei numeri, non può essere formalizzata.*

Lo scopo per cui Hilbert aveva originariamente fondato la «teoria della dimostrazione» era quello di *dare una dimostrazione di coerenza* per i *Principia* nel loro complesso (o per qualche altra formalizzazione accettabile della matematica, come ad esempio la teoria degli insiemi di Zermelo o di Zermelo-Fraenkel). Gödel, però, infranse anche questa speranza con un altro teorema, il cosiddetto «secondo teorema d'incompletezza di Gödel». Esso afferma che l'enunciato numerico o combinatorio che esprime la coerenza dei *Principia* (in quanto puro calcolo privo di interpretazione) è *esso stesso*, se i *Principia* sono coerenti, un enunciato indecidibile dei *Principia*. In altre parole, se i *Principia* (o qualsiasi altra formalizzazione della matematica sufficientemente forte da esprimere la teoria elementare dei numeri) sono coerenti, allora *questo* fatto richiede, per essere provato, un sistema ancora piú forte del sistema dato. (Cosí, se il sistema fosse una formalizzazione della totalità della matematica esistente, ci vorrebbe un sistema *ancora piú forte della totalità della matematica esistente* per provarne la coerenza, e se alla fine trovassimo un tale sistema – cioè, un sistema sufficientemente forte da provare la coerenza, ad esempio, della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel – ce ne vorrebbe uno *ancora* piú forte per provarne la coerenza!)

Il programma di Hilbert aveva una motivazione filosofica: una dimostrazione di coerenza *finitista* per tutta la matematica *non-costruttiva* doveva fornire un'*assicurazione* contro l'insorgenza di futuri paradossi. Il secondo teorema d'incompletezza di Gödel dice che questo tipo di assicurazione non può essere ottenuto: non è possibile dimostrare la coerenza della matematica non-costruttiva assiomatizzata con la totalità dei metodi matematici esistenti, e tanto meno quindi con i soli metodi «finitisti».

(Gerhard Gentzen, tuttavia, riuscí nel 1936 a dimostrare con mezzi costruttivi la coerenza della sola *aritmetica* mediante un ingegnoso procedimento di imitazione costruttiva di un frammento dell'aritmetica transfinita cantoriana. Naturalmente, tale dimostrazione richiede mezzi che non possono, nonostante

il loro carattere costruttivo, essere formalizzati nella sola aritmetica di Peano).

I risultati delle ricerche di Gödel – dimostrazione della completezza della logica del prim'ordine; dimostrazione dell'incompletezza della teoria degli insiemi e dell'aritmetica; dimostrazione della non-dimostrabilità della coerenza all'interno dello stesso sistema – scossero il mondo logico-filosofico come una serie di mazzate di un gigante. Ma il bello doveva ancora venire!

Nel corso di queste ricerche, Gödel fu condotto a elaborare la nozione di *funzione ricorsiva generale*. Nel 1936 Alonzo Church enunciò quella che doveva diventare nota come la tesi di Church: *la ricorsività coincide con la computabilità*. Assumendo questa tesi, Church riuscí a dimostrare che l'aritmetica non è soltanto incompleta, ma anche indecidibile! In altre parole, non potrà mai esistere un algoritmo che dica quando una formula del sistema è un teorema e quando non lo è. Naturalmente, se una formula è un teorema, allora è possibile che si finisca per venire a sapere che lo è, qualora ci s'imbatta in una sua dimostrazione. Ma non esiste nessun metodo funzionante in *ogni* caso che possa dire quando una formula del sistema *non è* un teorema. Non esiste, cioè, nessun «procedimento di decisione» per l'aritmetica di Peano (per non parlare dei *Principia* o della teoria degli insiemi di Zermelo).

Peggio ancora, Church riuscí a dimostrare che non esiste nessun procedimento di decisione neppure per la logica del prim'ordine! Anche se la logica del prim'ordine è completa in senso semantico (se una formula è valida, allora è un teorema), non esiste nessun «procedimento di non-dimostrazione» che sia sempre in grado di dire che un non-teorema *è* un non-teorema.

Questo risultato, noto come teorema di Church, illumina un aspetto della storia della logica. Boole, quando presentò l'algebra booleana, diede un procedimento di decisione. Peirce, invece, quando diede alla logica del prim'ordine il nome che porta oggi, «omise» di dare un procedimento di decisione (anche se sembra che fosse convinto che non sarebbe stato difficile darne uno). Analogamente, Frege, cosí come Russell e Whitehead, diede degli assiomi e delle regole di dimostrazione, ma non un procedimento di decisione. Ora è noto perché le cose andarono cosí: l'algebra booleana è decidibile, mentre la logica del prim'ordine non lo è! Questi risultati possono essere riassunti sotto forma di tabella:

Algebra booleana	Completa	Decidibile
Logica del prim'ordine	Completa	Indecidibile
Aritmetica (teoria dei numeri)	Incompleta	Indecidibile

Dopo questo periodo classico (che dura fino alla fine degli anni '30) l'interesse dei logici cominciò a focalizzarsi su due problemi nati insieme con la teoria degli insiemi moderna:

1) *Il problema del continuo di Cantor*: la potenza del continuo è la piú piccola potenza infinita immediatamente successiva alla potenza del numerabile?
2) L'assioma della scelta è *compatibile* con gli altri assiomi della teoria degli insiemi? È *indipendente* da essi?

A tale proposito compare di nuovo in evidenza il nome di Kurt Gödel. Nel 1938 Gödel dimostrò che la teoria di Zermelo-Fraenkel, se è coerente, allora rimane coerente anche dopo l'aggiunta dell'assioma della scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo (che afferma che l'insieme potenza di un insieme infinito ha la piú piccola potenza immediatamente successiva a quella dell'insieme stesso). Poiché la potenza del continuo coincide con la potenza dell'insieme di tutti i sottoinsiemi dell'insieme dei numeri interi, questo risultato dà una risposta parziale ai problemi 1) e 2): l'«ipotesi del continuo» – cioè, l'affermazione che la potenza del continuo *è* la piú piccola potenza infinita immediatamente successiva a quella del numerabile – è almeno *compatibile* con la teoria degli insiemi, compreso l'assioma della scelta. Ulteriori progressi in questo campo dovettero attendere fino al 1961, quando Paul Cohen dimostrò che l'ipotesi del continuo è *indipendente* dalla teoria degli insiemi – cioè, che *anche* la risposta *negativa* al problema di Cantor è compatibile con la teoria degli insiemi – e che *anche* la negazione dell'assioma della scelta è compatibile con la teoria degli insiemi.

Questi risultati di Gödel [1940] e di Cohen [1966] pongono profondi e sconcertanti problemi all'epistemologo della matematica. Bisogna dunque concludere che l'ipotesi del continuo non *ha* un vero valore di verità? Che dipende soltanto da noi *stipularne* la verità o la falsità? Oppure che in questo caso la verità matematica è *inconoscibile*? O si potranno forse trovare dei nuovi assiomi che siano «evidenti» (come molti dicono che sia l'assioma della scelta) e che consentiranno di *decidere* l'ipotesi del continuo? E dove si potranno trovare questi «nuovi assiomi» e come sarà possibile giustificarli epistemologicamente?

A questo punto i progressi della logica moderna diventano cosí vasti e rapidi che sarebbe inutile continuare a tentare di riassumerli. Alla teoria delle funzioni ricorsive è dedicato un apposito articolo di questa *Enciclopedia* («Ricorsività»). La scoperta di Tarski che il concetto di *verità* per un linguaggio formalizzato può essere definito con precisione senza usare nozioni filosofiche di nessun tipo, ma che la definizione ha bisogno di una teoria degli insiemi piú forte di quella del linguaggio originale ha avuto un impatto enorme sulla filosofia analitica. E bisogna aggiungere che praticamente tutti questi grandi teoremi della logica moderna hanno richiesto per essere dimostrati non soltanto una notevole ingegnosità matematica, ma anche un'enorme creatività, perché ciascuno di essi ha comportato l'invenzione di una tecnica matematica completamente nuova che è diventata, in tutti i casi, il punto di partenza fondamentale di tutta una nuova disciplina matematica.

11. *Il «paradosso di Skolem».*

Skolem, nel 1922, mise in rilievo un certo numero di conseguenze «paradossali» del teorema di Löwenheim-Skolem. Poiché hanno ancor oggi un certo interesse filosofico, se ne tratterà brevemente.

Occorre anzitutto ricordare la definizione di insieme «non-numerabile»: un

insieme S è non-numerabile se è infinito e se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi. In simboli, questa definizione si esprime scrivendo:

(1) $\quad -(\exists R)\ (R \text{ è uno-uno} \wedge \text{Il dominio di } R \subset N \wedge \text{Il codominio di } R \text{ è } S)$,

dove N è l'insieme dei numeri interi e 'Il dominio di $R \subset N$' è un'abbreviazione di $(x)(y)(Rxy \supset Nx)$.

Sia S l'insieme di tutti i numeri reali. Allora, la (1) sarà un teorema (che si dimostra con il famoso «ragionamento diagonale» di Cantor) in ogni teoria degli insiemi formalizzata. Quindi, la nostra teoria degli insiemi formalizzata *dice* che un certo insieme, e cioè S, è non-numerabile. Quindi, S deve *essere* non-numerabile in tutti i modelli della teoria degli insiemi. Quindi, la teoria degli insiemi (ad esempio, ZF (la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel)) ha soltanto modelli non-numerabili. Ma questo è impossibile! Perché, per il teorema di Löwenheim-Skolem, *nessuna* teoria può avere *soltanto* modelli non-numerabili, in quanto, se una teoria ha un modello non-numerabile, allora deve anche averne uno numerabile. Contraddizione.

La soluzione di questo apparente paradosso non è difficile, come osservò lo stesso Skolem. La (1) «dice» che S è non-numerabile (cioè, la (1) è vera se e solo se S è non-numerabile) quando il quantificatore '(R)' è interpretato come variabile sopra tutte le relazioni. Ma quando si sceglie un modello *numerabile* per il linguaggio della teoria degli insiemi, '(R)' *non* varia sopra tutte le relazioni, ma soltanto sulle relazioni *del modello*. La (1) «dice» soltanto che S è non-numerabile in un senso *relativo*, cioè nel senso che S non può essere messo in corrispondenza biunivoca con N (o con un sottoinsieme di N) da nessuna R *del modello*. E un insieme S può essere «non-numerabile» in questo senso *relativo* e tuttavia essere numerabile «nella realtà». Ciò accade quando esistono corrispondenze uno-uno fra S e N, ma *tutte* fuori del modello dato.

Se questo dimostra che il «paradosso di Skolem» non è una vera antinomia (a differenza del paradosso di Russell), sorgono però dei difficili problemi filosofici. Se qualunque teoria si accetti, comunque formalizzata, non riesce ad eliminare le «interpretazioni indesiderate» in cui l'intero universo è numerabile (e in cui, a fortiori, insiemi paradigmaticamente non-numerabili come il continuo sono in realtà numerabili), allora è chiaro che la nostra *idea* di ciò che significa per i numeri reali essere non-numerabili *non viene colta dalla nostra formalizzazione*. Come osservò Skolem, gli assiomi non possono fissare da soli l'interpretazione voluta delle nozioni matematiche, contrariamente a quanto sembrano credere molti matematici.

Questa osservazione può spingere un filosofo della matematica lungo vie diverse. Se è incline al platonismo, la prenderà come prova del fatto che l'intelletto ha dei poteri misteriosi di «cogliere i concetti» che i filosofi e gli scienziati di impostazione naturalistica non riusciranno mai a spiegare. Se invece è incline a qualche specie di verificazionismo (cioè, a identificare la verità con la verificabilità, piuttosto che con una delle nozioni classiche di «corrispondenza con la realtà»), risponderà: «Ciò è privo di senso! L'unica cosa che il "paradosso" dimostra è che la comprensione da parte nostra dell'enunciato 'I numeri reali sono non-numerabili' consiste nel sapere *che cosa significhi per esso essere dimostrato* e non nel "cogliere" un "modello"». In breve, le due posizioni estreme, il platonismo e il verificazionismo, sembrano trarre conforto dal paradosso di Skolem; soltanto la posizione «moderata» (che tenta di evitare le misteriose «percezioni» degli «oggetti matematici» pur mantenendo la nozione classica di verità-come-corrispondenza-con-la-realtà) viene a trovarsi in seria difficoltà.

I modelli del tipo di quelli che compaiono nel paradosso di Skolem (in cui l'«insieme di tutti i sottoinsiemi» di un insieme dato *all'interno del modello* non coincide con l'insieme di *tutti* i sottoinsiemi dell'insieme visto dall'«esterno») svolgono un ruolo importante nella teoria dei modelli. Non soltanto esistono modelli in cui un insieme che è non-numerabile in senso «interno» è invece in realtà numerabile, ma esistono anche modelli in cui accade il viceversa: un insieme che è *numerabile* in senso «interno» può invece in realtà essere non-numerabile!

12. *Il calcolo infinitesimale e l'analisi non-standard.*

Quando inventò il calcolo differenziale, Leibniz pensava ad esso come a un'aritmetica degli «infinitesimi», che per lui erano quantità *infinitamente piccole*, ma tuttavia non uguali a zero. Per piú di duecento anni i matematici fecero uso degli infinitesimi e molti teoremi importanti furono dimostrati per la prima volta effettuando dei calcoli sugli infinitesimi. Nonostante il fatto che si trattasse di un modo di ragionare molto attraente, sembrava tuttavia che dovesse contenere una profonda contraddizione. Cosí, per derivare la funzione $y = x^2$ alla Leibniz si dovrebbe scrivere:

(1) $$dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2 - x^2 = 2x\,dx + dx^2$$

da cui

(2) $$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

e, ponendo $dx = 0$,

(3) $$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Ma, come Berkeley osservò sprezzantemente, o dx è uguale a zero, oppure *non* è uguale a zero. Se $dx = 0$, allora la divisione per dx nella (2) non è ammissibile. Se invece $dx \neq 0$ (e in effetti deve esserlo, perché si suppone che gli infinitesimi siano infinitamente piccoli, ma *non* uguali a zero), allora *non lo si può porre uguale a zero*. Perciò, la stessa nozione di quantità *non-nulla* (e positiva) che sia infinitamente piccola sembra essere assurda.

Recentemente, tuttavia, si è rivelato possibile, usando le tecniche della logica matematica, *aggiungere* al sistema dei numeri reali ordinari certi elementi

«ideali» che svolgono esattamente il ruolo degli infinitesimi. Inoltre, molte operazioni del calcolo infinitesimale che sono estremamente complicate quando si usa il metodo dei limiti possono essere effettuate con rapidità e semplicità quando si usa l'«analisi non-standard», come viene chiamato questo sistema contenente gli elementi ideali. Infine, nuove scoperte matematiche sono state fatte usando l'«analisi non-standard» (l'esempio piú sensazionale è la teoria di Bernstein-Robinson dei sottospazi invarianti degli spazi lineari di dimensione infinita che ha definito una questione rimasta aperta per molti anni). A tutt'oggi questa è l'applicazione piú notevole della logica matematica alla matematica «ordinaria».

Innanzitutto, la contraddizione proclamata da Berkeley nella stessa nozione di infinitesimo va precisato. Si può dimostrare (come si vedrà) che *esistono* estensioni del sistema numerico standard contenenti elementi ideali *infinitamente vicini a zero*, cioè tali che $0<dx$ ma $dx<1/2$, $dx<1/4$, $dx<1/8$, ..., ecc. L'aggiunta di questi elementi ideali ai numeri reali è fatta nello stesso spirito della costruzione del sistema dei numeri complessi o dell'introduzione dei punti all'infinito in geometria proiettiva (si ricordi che il nome dato alla radice quadrata di -1 – «numero immaginario» – indicava un tempo una certa dose d'incredulità circa la sua esistenza).

Il calcolo attaccato da Berkeley è, in effetti, un orrore. In questo Berkeley aveva perfettamente ragione (e le sue critiche furono molto importanti). Può essere però corretto: nell'analisi non-standard non si dice che dy/dx è uguale a $2x$ nel caso della funzione $y=x^2$, ma che dy/dx è *infinitamente vicino a* $2x$. Se un numero z del sistema numerico esteso è infinitamente vicino a un numero «standard» z^*, si dice anche che z^* è la *parte standard* di z (in analogia con la «parte reale» di un numero complesso). Se z^* è la parte standard di z, allora $z=z^*+u$, dove u è un infinitesimo. S'introduce poi la notazione $x\approx y$ per indicare che «x è infinitamente vicino a y» (cioè, $|x-y|$ è infinitesimo). La derivazione di $y=x^2$ nell'analisi non-standard assumerà allora questa forma:

$$(4)\qquad \begin{aligned} dy &= (x+dx)^2-x^2= \qquad\qquad \text{(per } dx \text{ infinitesimo)}\\ &= x^2+2x\,dx+dx^2-x^2=\\ &= 2x\,dx+dx^2. \end{aligned}$$

Ma $dx\neq 0$, e si può quindi dividere per dx ottenendo:

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx}=2x+dx.$$

Poiché dx è infinitesimo, la (5) dice che:

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx}\approx 2x,$$

cioè $2x$ è la parte standard di dy/dx.

L'unica differenza con il procedere dei matematici del XVII e del XVIII secolo consiste nel dire che $dy/dx\approx 2x$ e non che $dy/dx=2x$.

Questo è soltanto un accenno dell'idea che sta alla base dell'analisi non-standard. Il difficile sta nel portarla avanti. Come osserva Martin Davis: «Non c'è nessuna difficoltà nel problema puramente algebrico di immergere i numeri reali in un campo contenente degli infinitesimi (cioè in quello che in linguaggio algebrico è chiamato un campo ordinato non-archimedeo). Le difficoltà sorgono però non appena si ha a che fare con le funzioni trascendenti. Cosí, per derivare alla Leibniz la funzione $\sin x$, si sarebbe tentati di scrivere:

$$\sin(x+dx)-\sin x=\sin x\,(\cos dx-1)+\cos x\,\sin dx,$$

dove dx è infinitesimo. Ma scrivere ciò presuppone non soltanto che il seno sia stato definito per i numeri della forma "reale piú infinitesimo", ma anche che lo si sia fatto in modo che continui a valere la formula di addizione per il seno. È questo il problema di cui tiene le chiavi la logica moderna (piú precisamente, la teoria dei modelli).

«Leibniz postulava un sistema di numeri che avesse le stesse *proprietà* dei numeri ordinari, ma che comprendesse gli infinitesimi. La derivazione di $\sin x$ nel modo discusso in precedenza non gli poneva perciò nessun problema. Tuttavia, la posizione di Leibniz è apparentemente assurda, in quanto i numeri reali ordinari posseggono almeno una *proprietà* di cui non gode l'estensione da lui auspicata, e cioè che fra di essi non vi sono infinitesimi.

«Questo paradosso può essere evitato specificando un linguaggio formale nel senso della logica moderna (cioè, un linguaggio spietatamente preciso, come lo sono i linguaggi di programmazione dei calcolatori). Il principio di Leibniz può allora essere reinterpretato nel modo seguente: *esiste un'estensione dei numeri reali che contiene degli elementi infinitesimi e che possiede le stesse proprietà dei numeri reali che possono essere espresse nel linguaggio formale dato*. Se ne conclude che la proprietà di essere un infinitesimo non può essere espressa in tal modo o, come si usa dire, che *l'insieme degli infinitesimi è un insieme esterno*» [1977, p. 2].

Anche se l'analisi non-standard fu creata da Abraham Robinson negli anni '60, gli strumenti di base della teoria dei modelli usati nella costruzione cominciano con i (ma vanno molto al di là di essi) classici teoremi di Gödel.

Si consideri un linguaggio formalizzato L adeguato alla formalizzazione della matematica. (Ad esempio, L potrebbe essere ZF, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel). Si aggiunga a L un nuovo simbolo a e si considerino i seguenti assiomi:

A) Assiomi di ZF (o di qualunque altro sistema equivalente):

a è un numero intero
$a\neq 0$
$a\neq 1$
$a\neq 2$
$\vdots$

(un assioma della forma $a\neq n$ per ogni n).

È possibile derivare una contraddizione (nel senso sintattico di una *dimostrazione di contraddizione*) dall'insieme di assiomi A)? La risposta è no. Infatti, una dimostrazione formale è (per definizione) finita. Perciò, una dimostrazione di contraddizione farebbe uso soltanto di un numero finito degli assiomi precedenti. Ma i primi n assiomi sono coerenti per ogni n, come si vede facilmente. Perciò, l'intero insieme è coerente (nel senso sintattico detto sopra).

Ma un insieme *coerente* ha un *modello* (per il teorema di completezza di Gödel). Quindi, l'insieme A) ha un modello. (Avremmo anche potuto usare il teorema di compattezza: poiché ogni sottoinsieme finito di A) ha un modello, ne segue che A) ha un modello). Ma in ciascuno di questi modelli, l'oggetto denotato con 'a' sarà un elemento *ideale* e non un numero intero standard: infatti, a è (dal punto di vista «interno», cioè servendosi del modello dato per interpretare il linguaggio formalizzato) un «numero intero» e tuttavia a è diverso da 0, 1, 2, ..., cioè da ogni numero intero *standard* (naturalmente, la proprietà di essere un numero intero «standard» non è esprimibile nel linguaggio rispetto a questa interpretazione).

Ma nel modello ci sarà anche un inverso $1/a$ di a (perché L richiede che ogni numero intero abbia un inverso razionale) e, poiché $a>0$, $a>1$, $a>2$, ... ne segue che $1/a>0$ e che $1/a<1/2$, $1/a<1/4$, $1/a<1/8$, ..., cioè che $1/a$ è un *razionale infinitesimo* e si è cosí riusciti a costruire un modello di L contenente degli infinitesimi.

L'effettiva costruzione di un modello per l'analisi non-standard che goda delle proprietà richieste è un po' piú complicata di quella delineata sopra. Quello che colpisce, però, è come un risultato che non ci sarebbe speranza di dimostrare con le tecniche algebriche usuali – l'*esistenza* di un'«estensione non-archimedea» del sistema numerico standard *che soddisfi a tutti i teoremi di ZF* (o di qualunque altra teoria matematica) – sia una conseguenza immediata del teorema di completezza di Gödel e del teorema di compattezza.

13. *La filosofia della matematica.*

Mi è stato suggerito di cominciare questo paragrafo dando una descrizione delle principali tendenze recenti della filosofia della matematica. Ho invece deciso di cominciare con il tema «perché niente funziona». Non faccio però questo per puro capriccio: spiegare come e perché apparentemente «niente funzioni», cioè come e perché *ogni* filosofia sembri fallire quando arriva il momento di spiegare il fenomeno della conoscenza matematica, comporterà infatti dire qualche cosa su ciascuna delle principali tendenze recenti. E servirà anche, paradossalmente, a indicare perché la filosofia della matematica sia un campo cosí cruciale per la filosofia. Se esiste una cosa come il «progresso filosofico» – e devo confessare con fede inconcussa che per me questa non è una chimera – allora esso è determinato dal concentrare l'attenzione dei filosofi su aree e problemi nei confronti dei quali le loro idee favorite vanno in crisi, aree in cui sembra che «niente funzioni». Non si faranno dei passi avanti rispetto al presente stato della discussione filosofica discutendo ancora una volta se esistano o no dei «canoni del metodo scientifico» o tirando fuori gli esempi familiari dalla storia della fisica; si può raggiungere un nuovo livello di discussione soltanto prendendo sul serio l'idea che ci sono dei problemi reali per *tutte* le opinioni correnti – e nessun'area è piú adatta a renderci consapevoli di questo fatto della filosofia della matematica.

13.1. Il logicismo.

Il logicismo, cioè l'opinione che «la matematica è logica travestita» e che è *questo* il motivo della sua infallibilità, sembra essere defunto per quel che concerne l'esistenza di attuali sostenitori. Tuttavia, si dimentica spesso che dal logicismo è venuto fuori qualcosa che ha un valore imperituro. Non starò qui a ripetere le obiezioni al logicismo – la necessità di ampliare la nozione di «logica», e cosí via – ma farò invece la seguente osservazione: dopo le ricerche di Frege e di Russell siamo molto piú consapevoli di quanta matematica possa essere fatta nei sistemi logicistici costruiti per codificare la logica deduttiva. I filosofi che considerano logica la logica del second'ordine – e alcuni ce ne sono – direbbero che *tutta* la matematica ordinaria può essere formalizzata all'interno della logica (perché può essere formalizzata nella logica del second'ordine), anche se non sosterrebbero che ciò renda piú facile l'epistemologia della matematica (semmai la rende piú difficile!), mentre, anche se si segue quella che sembra essere la moda piú diffusa e si limita il termine 'logica' all'ambito della logica del prim'ordine, bisogna comunque ammettere che gran parte di quella che ogni matematico riconoscerebbe come «matematica» può essere codificata all'interno della «logica». Ad esempio, tutta la teoria dei gruppi del prim'ordine non è altro che un frammento della logica del prim'ordine. Forse tutti i filosofi analitici ammettono oggi che «la natura della verità logica» e «la natura della verità matematica» costituiscono *un unico* problema, e non due – e questo fatto costituisce già di per se stesso una vittoria del punto di vista di Russell, la cui conclusione piú moderata era che per il futuro non sarebbe piú stato possibile tracciare una linea netta fra la logica e la matematica. (Russell cambiò la sua opinione un certo numero di volte, ma originariamente non credeva che la «riduzione» della matematica alla logica dimostrasse che la matematica fosse analitica – a differenza di Frege, che ci credeva, anche se usava una nozione di analiticità diversa da quella di Kant).

13.2. Il positivismo logico.

Per un certo numero di anni i positivisti logici resero popolare l'opinione secondo cui le verità matematiche sono tali soltanto in virtú delle «regole del linguaggio». (Anche se critica la nozione di «convenzione», Wittgenstein sembra aver sostenuto una variante di questo punto di vista). Se si prende per «regola del linguaggio» qualche cosa di simile a una convenzione (prendendo come modello di convenzione ciò che viene stipulato esplicitamente), allora que-

sto punto di vista va incontro a una difficoltà che fu segnalata indipendentemente da Wittgenstein e da Quine: le verità della logica (e della matematica) sono infinite, mentre le stipulazioni esplicite sono sempre in numero finito. Cosí, la frase 'Le verità logiche sono vere per convenzione' non può significare che esse sono *individualmente* vere per convenzione (un atto di stipulazione per ciascuna verità logica), ma può soltanto significare che esse *seguono* da delle convenzioni, cioè che le verità logiche (matematiche) sono vere per convenzione nel senso che sono le *conseguenze logiche* di convenzioni. L'uso della nozione di *conseguenza logica* rende però una tale spiegazione della verità logica inficiata da un circolo vizioso.

Per evitare questa difficoltà, sembra che Wittgenstein abbia sostenuto che il modello di convenzione debba essere sostituito dal modello di una semplice pratica comportamentistica, di una «forma di vita». Ma quale potrebbe *essere* questa pratica? Per sostenere la sua opinione che le verità logiche e matematiche non hanno *alcun* contenuto descrittivo, la pratica dovrebbe consistere nel sostenere che certe verità sono assolutamente immuni da revisione. Questa spiegazione, se supera la precedente obiezione (perché una pratica, come un'abitudine, può essere *generale*: il sostenere che infinite verità sono immuni da revisione può essere il risultato di un numero finito di abitudini), sembra però essere una distorsione dell'effettiva pratica matematica. Si consideri, ad esempio, l'affermazione che un sistema logicistico è *coerente*. Ora, *non* si sostiene che una tale affermazione è assolutamente immune da revisione. In effetti, per quanto buona sia la mia «dimostrazione di coerenza», sarò costretto ad abbandonare l'affermazione che il sistema è coerente se mi accadrà di *derivare effettivamente una contraddizione*. Cosí, *l'osservazione che un calcolo ha effettivamente un certo risultato* ha un certo carattere di «fatto bruto» (in qualche modo analogo al carattere di un enunciato relativo a un'osservazione nelle scienze empiriche) che gli consente perfino, in certe circostanze, di superare (o d'imporre una modificazione nell'enunciazione dei) i principî generali meglio attrezzati. Il fatto è che c'è un certo elemento «sintetico» almeno nella matematica *combinatoria*, ed è l'incapacità di darne conto in termini di «regole del linguaggio» che li rende in definitiva semplicemente incredibili. D'altro lato, una volta stabilito che esiste almeno *un* fatto matematico che non è una semplice nostra stipulazione (e neppure una nostra «forma di vita») – ad esempio, quello che la *coerenza* delle nostre stipulazioni/pratiche non è essa stessa né una stipulazione né una pratica – allora le spiegazioni logico-positiviste/wittgensteiniane della verità logica e matematica fanno immediatamente bancarotta.

13.3. Il formalismo.

I formalisti non tentarono in realtà di fornire un'epistemologia della logica e neppure un'epistemologia della matematica combinatoria finitista. Sembra che Hilbert pensasse che la prima fosse troppo evidente per *aver bisogno* di un'epistemologia, mentre la seconda tratta le proprietà di oggetti concreti (segni sulla carta) che sono parimenti cosí evidenti da aver bisogno di poca o nulla

discussione epistemologica. Erano la teoria degli insiemi e la matematica non-costruttiva che avevano bisogno di un po' di commenti, e il commento di Hilbert era che queste sono soltanto estensioni «ideali» (e di per se stesse prive di significato) della matematica «reale» (finita e combinatoria).

Mentre molte delle obiezioni al formalismo sono ben note (e non le si riprenderà in esame qui), c'è una difficoltà che non è molto nota e che merita una breve esposizione.

Questa difficoltà nasce dal fatto che le locuzioni della teoria degli insiemi sono usate sia negli enunciati empirici sia in quelli matematici. Si supponga, ad esempio, che io dica: 'Nella galassia A ci sono tante stelle quante ce ne sono nella galassia B'. Nell'interpretazione piú naturale, ciò significa che *esiste una corrispondenza biunivoca fra le stelle della galassia A e le stelle della galassia B*. Ora, si supponga che l'enunciato sia vero. Allora, in base a una concezione realista della verità, deve esserci qualche cosa che lo *rende* vero – e l'ovvio candidato per il «qualche cosa» è proprio la *corrispondenza biunivoca* (o una qualsiasi di esse, dal momento che ce ne saranno molte). Ma se gli oggetti come gli insiemi, le relazioni, le corrispondenze biunivoche, ecc. sono soltanto delle *finzioni*, allora questo «qualche cosa» (o questi «qualche cosa») in realtà non esistono. Perciò, in fin dei conti, non esiste in realtà un «qualche cosa» che rende vero l'enunciato vero. E allora, come fa a *essere* vero?

In breve, il formalista sembra proprio essere una specie di nominalista filosofico – ed è opinione comune che il nominalismo è inadeguato all'analisi del discorso empirico. Anche un'affermazione cosí semplice come 'La distanza dell'elettrone A dal protone B è uguale a *d*' sarebbe difficile da spiegare per un nominalista/formalista. Se *i numeri sono segni sulla carta*, allora l'enunciato precedente dice che due particelle elementari stanno in una certa relazione con alcuni segni sulla carta? *Quale* relazione? (Un operazionista estremo potrebbe non essere messo in imbarazzo da questa domanda, ma le difficoltà dell'operazionismo nella filosofia delle scienze empiriche sono decisive e verrebbero ereditate dal formalismo se il formalista si avviasse su una via operazionista).

13.4. Il platonismo.

A causa delle difficoltà della spiegazione formalistica e di quella logico-positivistica, non è sorprendente che ci sia stato un certo *revival* del *realismo* sia nella filosofia della matematica sia nella filosofia delle scienze empiriche. Questo *revival* è anche in parte la conseguenza di una certa impressione che la spiegazione formalistica e quella logico-positivistica abbiano poco a che fare con l'effettiva pratica matematica. Hao Wang la esprime molto bene nel suo *From Mathematics to Philosophy* [1974]. A chi lavora in teoria degli insiemi non sembra affatto che gli assiomi della teoria degli insiemi – gli assiomi che descrivono il cosiddetto «concetto iterativo di insieme» –, compresi il rimpiazzamento e la scelta, siano in alcun modo né «privi di significato» né mere «convenzioni». Quanto piú si lavora in teoria degli insiemi, tanto piú sembra di *essere costretti ad accettarli*, come dice Wang. Il problema è quello di trovare una spiega-

zione che giustifichi questa impressione di «essere costretti ad accettare» particolari assiomi.

La spiegazione realista piú semplice è quella proposta da Kurt Gödel. Secondo Gödel gli oggetti matematici esistono veramente e la mente umana possiede una facoltà, distinta ma non completamente diversa dalla percezione, mediante la quale acquisisce un'intuizione sempre migliore del comportamento degli oggetti matematici.

La difficoltà di questo tipo di platonismo consiste nel fatto che esso sembra essere palesemente incompatibile con il semplice fatto che noi si pensa con i nostri cervelli e non con delle anime immateriali. Gödel avrebbe respinto questo «semplice fatto», come l'ho ora descritto, considerandolo da parte mia un mero pregiudizio naturalistico, ma a me pare che questo fosse un rozzo medievalismo da parte *sua*. Non è necessario essere un «teorico dell'identità» nella filosofia della mente (cioè, uno che crede che le sensazioni, le intuizioni e le percezioni coincidano con degli eventi cerebrali) per riconoscere le difficoltà insite nel tipo di dualismo in cui credeva Gödel. Non è possibile immaginare *nessun* tipo di processo neurale che possa anche soltanto *corrispondere* alla «percezione di un oggetto matematico». E se si sostiene che gli eventi mentali (come quello di «intuire» un nuovo fatto matematico) non possono neppure *corrispondere* ad eventi cerebrali (che è la posizione di Gödel come io la capisco), allora come spiegare il ruolo importante che si *sa* che il cervello svolge nella percezione *ordinaria*, per non parlare della *memoria*, dei processi linguistici, ecc.? L'idea che il cervello sia un dispositivo cibernetico che immagazzina le informazioni, che effettua dei calcoli su quelle informazioni e che controlla il corpo – il tutto senza interferenze da parte di una misteriosa «anima» – è basata su una grande quantità di progressi compiuti in una mezza dozzina di scienze. Dire, come ho fatto, che «noi si pensa con i nostri cervelli», *non* mi pare sia naturalismo pedissequo dopo trecento anni di progressi in fisica e in biologia (per non parlare di scienze piú recenti). A me pare che Gödel cercasse di rifugiarsi nelle idee tradizionali per difficoltà di trovarne delle nuove che consentissero di spiegare il fenomeno della conoscenza matematica, ma non posso credere che la soluzione *verrà* da un tale ritorno al passato.

13.5. L'olismo.

L'argomento contro il formalismo esposto in precedenza – e cioè, quello che il formalismo/nominalismo è inadeguato per le necessità ontologiche delle scienze *empiriche* – non compare nell'opera di Quine esattamente nella forma in cui è stato enunciato, ma è nello spirito di gran parte dei suoi scritti. Quine ha sempre sostenuto che la matematica non deve essere considerata di per se stessa, ma come una parte del corpus totale della scienza e che la necessità della quantificazione sopra gli oggetti matematici (Quine direbbe la quantificazione sopra gli *insiemi*), se si vuole avere un linguaggio abbastanza ricco per le necessità delle scienze empiriche, è la maggior ragione possibile per fare la «posizione» (*posit*), ad esempio, degli oggetti materiali. Per Quine gli insiemi

e gli elettroni sono simili in quanto oggetti che occorre postulare se si vuol fare la scienza come la si fa oggi. Forse in futuro verrà trovato qualche altro modo di far scienza, e allora la nostra filosofia cambierà a mano a mano che cambia la nostra scienza.

Questa specie di pragmatismo olistico è attraente in quanto 1) riconosce ciò che i logicisti furono per lungo tempo i soli a sostenere, e cioè che bisogna tener conto dell'uso delle locuzioni matematiche non soltanto negli enunciati della matematica pura, ma anche in quelli empirici; e 2) fornisce un buon motivo per essere realisti circa l'esistenza degli insiemi senza postulare misteriose anime immateriali né misteriose facoltà di *percepire* gli insiemi o gli altri oggetti matematici. Esaminandolo piú da vicino, però, anch'esso va incontro a serie difficoltà. Quine sembra dire che la scienza *nel suo complesso* è una grande teoria esplicativa e che la teoria è giustificata *nel suo complesso* per la sua capacità di spiegare le *sensazioni*. Anche se si pensa che il riduzionismo di Quine (cioè, la sua insistenza sul fatto che tutti gli oggetti matematici *devono* essere identificati con *insiemi*) non sia in realtà una conseguenza necessaria del suo olismo, ma che si tratti di una sua idea personale, l'idea che l'attività del matematico consista nel portare dei contributi a uno schema per spiegare le *sensazioni* non sembra andare affatto d'accordo con la pratica matematica. Che cosa hanno a che fare con la spiegazione delle sensazioni l'accettazione o la non-accettazione dell'assioma della scelta (o di un principio che si sa essere coerente ma che *non* viene accettato come l'assioma 'V = L' che Gödel propose una volta, ma che in seguito abbandonò)?

13.6. Il «realismo quasi-empirico».

Mi sembra che la spiegazione di Quine sia troppo attraente per poterla semplicemente gettare a mare, a causa della difficoltà sopra segnalata, perché essa indica una direzione in cui ci si può muovere per essere realisti senza essere metafisici. Cosí, ho cercato recentemente (in *What is Mathematical Truth* [1975]) di elaborare una spiegazione che potrebbe essere chiamata «realismo quasi-empirico» e che apporta fondamentalmente due modificazioni alla spiegazione olistica.

La prima modificazione consiste nell'aggiungere i *fatti combinatori* alle *sensazioni* come cose per le quali si vuol che ci siano dei teoremi matematici che le spieghino e che le sussumano sotto «leggi» generali. Il principio d'induzione matematica, ad esempio, sta con il fatto che un pastore, quando conta le sue pecore, ottiene sempre lo stesso numero (se non ha perso o acquistato delle pecore e se non sbaglia a contare) qualunque sia l'ordine in cui le conta, nella stessa relazione in cui una qualsiasi generalizzazione sta con un suo caso particolare (il fatto che una collezione finita riceva la stessa «conta» qualunque sia l'ordine in cui viene contata è *equivalente* al principio d'induzione matematica). La gente possiede la capacità di osservare i fatti combinatori e di generalizzarli. Se la scienza empirica è, come dice Quine, «un campo che ammette come condizioni al contorno l'esperienza», allora perché non si potrebbe

considerare la scienza matematica come un campo che ammette come condizioni al contorno i fatti combinatori che possono essere effettivamente rilevati dalla calcolatrice mentale (o cervello)?

Quest'idea *non* costringe ad abbracciare l'opinione di Mill secondo cui un principio come il principio d'induzione matematica è riconosciuto vero per «induzione» *baconiana*. Infatti, come osserva Wittgenstein, la spiegazione di Mill (Wittgenstein non lo cita per nome, ma è chiaro che si riferisce a lui) può essere corretta come descrizione del modo in cui ci si è convinti per la prima volta di una certa forma di verità matematica (ad esempio, del fatto che il numero cardinale delle pecore non dipende dall'ordine in cui le si conta), senza essere corretta come descrizione dello *stato presente* di quella verità. D'altro lato, come osserva Quine, si può ammettere che un principio come il principio d'induzione matematica ha uno status speciale – per cui occorrerebbe qualche cosa di virtualmente inimmaginabile per costringere a rivederlo (come la scoperta di una contraddizione nella teoria del prim'ordine dei numeri naturali?) – senza concedere che questo status sia quello che Wittgenstein chiama «regola di descrizione» (cioè, l'*analiticità*, anche se Wittgenstein non usa questo termine). Un «realista quasi-empirico» sofisticato può concedere che le verità matematiche raggiungano lo status di essere «a priori rispetto al nostro corpo di conoscenze», come alcune leggi fisiche, senza concedere che *questo* status sia lo stesso dello status di «regola» dei positivisti. Si può essere empiristi senza essere né milliani né positivisti.

L'idea che nella matematica pura ci sia qualche cosa di *analogo* al ragionamento empirico è stata sostenuta anche da Lakatos e perfino da Gödel, che era troppo sofisticato per pensare che *tutto* ciò che è contenuto nell'«autoevidenza», nella «plausibilità» matematiche siano degli atti di «percezione». Il fatto che due filosofi cosí radicalmente lontani sulle questioni fondamentali come Quine e Gödel siano stati indotti a riconoscere la presenza nella matematica pura di un tale elemento – di un elemento, cioè, che assomiglia al ragionamento «ipotetico-deduttivo» delle scienze empiriche – è certamente singolare e suggestivo.

Quine ammette che anche nelle scienze empiriche vi sono delle considerazioni, diverse dalla predizione delle sensazioni, che svolgono un ruolo importante. Egli parla di «conservatorismo» – del desiderio, cioè, di mantenere principî che sono stati per lungo tempo «centrali» in quel «campo» – e di «semplicità» – che occasionalmente ci spinge a sfidare il «conservatorismo» quando un cambiamento radicale che si produce al centro porta a semplificazioni di vasta portata dell'intero sistema.

La seconda modificazione che propongo di fare alla spiegazione di Quine è di aggiungere un terzo vincolo non sperimentale ai suoi due vincoli costituiti dalla «semplicità» e dal «conservatorismo» (naturalmente questi non sono in realtà dei vincoli *singoli*). Il vincolo che voglio aggiungere è questo: *l'accordo con le «intuizioni» matematiche*, qualunque sia la loro fonte.

Secondo la mia opinione, le «intuizioni» matematiche non sono misteriose «percezioni» degli oggetti matematici, né hanno un'unica fonte. La spiegazione di Mill-Wittgenstein – secondo cui l'induzione matematica (sotto la forma del «principio del conto delle pecore») *è partita* come induzione baconiana per essere poi elevata a uno status diverso – mi sembra giusta per l'induzione matematica, ma non per la teoria degli insiemi. Lo stesso Quine dà una spiegazione plausibile dell'origine dell'«autoevidenza» degli assiomi di comprensione della teoria degli insiemi (che dicono, se si ignora il problema di evitare il paradosso di Russell, che ogni condizione determina un insieme). In *Ontological Relativity* [1969], Quine osserva che la quantificazione sulle lettere predicative compare nel linguaggio naturale del tutto inconsciamente come puro espediente per evitare la ripetizione inelegante d'intere espressioni predicative. In effetti, l'uso di quelle che Quine chiama classi «virtuali» (cioè, astrazioni di classi che possono essere facilmente *eliminate* dal discorso), porta automaticamente alla quantificazione sul predicato (che obbliga ad accettare almeno la teoria *predicativa* degli insiemi); e la quantificazione sui predicati porta precisamente a una delle due nozioni cantoriane di insieme: *l'estensione di un predicato*. Il fatto che l'origine dell'idea che ogni condizione determina un insieme possa essere stato un qualche cosa di cosí mondano come l'abitudine linguistica di tutti i giorni di evitare la ripetizione di lunghe espressioni non significa che l'esistenza degli insiemi debba essere messa in discussione perfino dopo aver costruito una teoria soddisfacente (che eviti, si spera, i paradossi). «Per la mente illuminata, l'illegittimità delle origini non è una vergogna», commenta a bocca storta Quine.

Il realismo quasi-empirico, se avesse successo, possiederebbe due virtú notevoli: 1) la virtú che le «intuizioni» possono essere *spiegate* (nessuna nozione *monolitica* o facoltà misteriosa); e 2) la virtú di dirigere l'attenzione non soltanto sui vari motivi per cui, e sui procedimenti mediante i quali, in matematica vengono adotta tinuovi assiomi (un argomento notevolmente trascurato!), ma anche sulle varie forme di «ragionamento plausibile» che, in mancanza di dimostrazioni, vengono usate in matematica (un argomento a cui era molto interessato Polya).

Ho detto all'inizio di questo paragrafo che «niente funziona». Questo si applica, ahimè, anche alle mie idee: il che non significa dire, mi affretto ad aggiungere, che io proponga di abbandonarle!, ma che vedo grosse difficoltà che rivelano come la mia non possa essere la *soluzione* del problema della conoscenza matematica, anche se, nei limiti del possibile, essa funziona, come io credo.

Il problema sta nel fatto che è del tutto oscuro che cosa abbia a che fare con la *verità* il soddisfare *questo* tipo di vincolo non-sperimentale, cioè, l'accordo con le «intuizioni», qualunque sia la loro fonte. Avendo accettato la posizione del realismo – il che significa che si considerano gli enunciati matematici veri o falsi – e avendo dato una descrizione, per quanto vaga, del modo in cui gli enunciati matematici vengono accettati, non è possibile eludere la domanda: qual è il legame fra l'*accettabilità* e la *verità*? Le misteriose «percezioni» di Gödel costituirebbero almeno un tale legame, mentre non è chiaro come possano esserlo le «intuizioni» matematiche, se in fondo esse non sono altro che

generalizzazioni del finito sulla base della psicologia umana, forme reificate di grammatica, ecc.

«Per la mente illuminata, l'illegittimità delle origini non è una vergogna», dice Quine. *Perché non lo è?* Probabilmente perché noi giudichiamo in base al rendimento adulto – il che, nel caso della teoria degli insiemi, significa *utilità per la fisica* – e non in base all'«origine». Ma se l'«origine» non è una giustificazione, se soltanto l'utilità per la fisica – o, in definitiva, la spiegazione delle sensazioni – è quello che conta, allora la teoria degli insiemi va altrettanto bene *senza* l'assioma della scelta che *con* 'V = L'. Quine, apparentemente, non sarebbe disturbato da una tale conclusione relativistica, ma chiunque lavori in teoria degli insiemi lo sarebbe. Si ritorna cosí alla versione insoddisfacente dell'«olismo» discussa nella sezione precedente se *non* si considera la conformità con le nostre intuizioni come un qualcosa che ha un'importanza *metodologica* e non solo psicologica, e se la si considera cosí, ci si trova subito impigliati in una seria preoccupazione epistemologica: come spiegarne l'importanza metodologica.

13.7. Il modalismo.

Una delle obiezioni al platonismo si è sempre basata sulla stranezza di postulare un universo bipartito in due specie di entità: le cose fisiche e gli «oggetti matematici» (che sono gli equivalenti moderni delle forme di Platone). Ma il realista matematico non è in realtà obbligato ad aderire a *questa* specie di platonismo, con il problema connesso di come si può riuscire a pensare e a far riferimento a entità con cui non è possibile avere alcun rapporto *causale*. Come ho osservato anni fa (in *Mathematics without Foundations* [1967]) e come ha osservato recentemente Parsons (in *What is the Iterative Conception of Set?* [1975]) si può riformulare la matematica classica in modo tale che, invece di parlare di insiemi, numeri o altri «oggetti», si asserisce semplicemente la *possibilità* o l'*impossibilità* (nel senso di *possibilità* o *impossibilità matematiche*) di certe strutture. «Gli insiemi sono possibilità permanenti di selezione», era lo slogan. Le strutture della cui possibilità o impossibilità si parla possono a loro volta essere predicate di oggetti fisici, o di oggetti non specificati o persino – se si hanno scrupoli nominalistici perfino nell'accettare nella propria ontologia le proprietà del prim'ordine – di cose concrete. La matematica, da questo punto di vista (che chiamavo la «matematica come logica modale») possiede una *nozione* speciale – quella di possibilità – ma non *oggetti* speciali. Il «modalismo», anche se ha delle virtú terapeutiche (esso spiega come sia possibile la matematica senza assumere l'esistenza dell'iperuranio platonico) e se Parsons ed io crediamo entrambi che possa far luce sul cosiddetto «concetto iterativo d'insieme», non risponde però al problema *epistemologico*. Dando una spiegazione «realista quasi-empirica» sul modo in cui i fatti modali vengono *conosciuti*, allora i problemi saranno esattamente gli stessi, sia che si accetti la descrizione della «matematica come logica modale», sia che si accetti la descrizione della «matematica come teoria degli oggetti matematici». Ancora una volta, «niente funziona».

13.8. L'intuizionismo.

Poiché il formalismo non funziona e, d'altro lato, le varie versioni del realismo prese in considerazione comportano problemi epistemologici apparentemente insuperabili, può valere la pena di riprendere in esame l'intuizionismo, il quale accetta il fatto che gli enunciati matematici siano dotati di significato, ma respinge le assunzioni realiste sulla verità (ad esempio, la «bivalenza», cioè l'affermazione che ogni enunciato è o vero o falso) finora accettate. Vi sono però almeno tre difficoltà nell'intuizionismo: 1) L'intuizionismo è apparentemente, almeno per quel che riguarda il contenuto se non nell'origine storica, un'estensione al linguaggio matematico dell'operazionismo e presuppone che il linguaggio *non*-matematico possa essere analizzato in un modo operazionistico o verificazionistico. La difficoltà non sta nel fatto che gli intuizionisti non sono in grado di derivare un numero di teoremi matematici sufficienti per «fare» la fisica – Bishop ha dimostrato in maniera convincente che possono farlo – ma nel fatto che l'interpretazione dei connettivi logici data dall'intuizionismo non «si adatta» a una fisica non-operazionistica. Ad esempio, il connettivo $\supset$ («se ... allora») è interpretato dagli intuizionisti nel senso che esiste una procedura per passare da una *dimostrazione* dell'antecedente a una dimostrazione del conseguente. Ora, mentre l'assunzione che esistano cose come le verificazioni («dimostrazioni») di affermazioni isolate può andare benissimo per la matematica, lo stesso non si può dire per la fisica, come hanno osservato molti autori. Che significato può quindi avere il connettivo $\supset$ in un enunciato *empirico*? 2) Gli intuizionisti assumono l'esistenza di una distinzione, che è familiare nella fenomenologia e nella filosofia neokantiana, fra i fatti *empirici* e i fatti trascendenti o a priori della mente. Ad esempio, l'enunciato 'Ogni numero ha un successore' non significa (se interpretato da un intuizionista) che sia effettivamente possibile per la mente empirica «costruire» una quantità arbitrariamente grande di numeri, ma, grosso modo, che non è a priori impossibile costruire una quantità arbitrariamente grande di numeri (e che *questo* fatto è esso stesso fenomenologicamente «evidente»). Per gli empiristi come me, questo stesso far ricorso a un a priori e a una misteriosa «evidenza» fenomenologica è altrettanto criticabile del platonismo. In fondo, gli intuizionisti non si limitano a dire che è *autoevidente* che sono *possibili* successioni finite arbitrariamente lunghe? E come può *questa* affermazione essere *o* un'analisi di ciò a cui si riduce questa possibilità *o* una descrizione della facoltà mediante la quale si conoscono queste verità «a priori»? 3) Il problema della coerenza della mente è liquidato dagli intuizionisti un po' troppo facilmente. Se esiste una cosa come la struttura trascendente della mente, perché non potrebbe essere incoerente? «È evidente che non lo è» non può essere considerata una risposta soddisfacente.

13.9. Verso quali direzioni bisogna proseguire?

Dopo questa deprimente analisi del «perché niente funziona», il lettore potrebbe aspettarsi che io gli consigliassi di smetterla con la filosofia della matematica (e forse con la filosofia in generale). Mi sembra però che la situazione, pur essendo buia, non sia del tutto priva di speranze. Ho già detto, ad esempio, che c'è qualche cosa che mi pare valga la pena di essere approfondito nel «realismo quasi-empirico» come approccio alla filosofia della matematica. La difficoltà epistemologica che ho segnalato potrebbe essere superata, credo, osservando che, per molte ragioni, la «verità» non può essere interpretata sulla base del vecchio modello «realistico trascendentale», come lo chiamava Kant. Se si pensa invece alla verità, per usare una frase di Ullian, come *bontà definitiva di adattamento*, allora la connessione fra i nostri *criteri* di adattamento, anche se sono in parte estetici, e la *verità* può non apparire cosí misteriosa. È chiaro che questo è un programma di lavoro e non una «soluzione». Una cosa che bisogna verificare, se questo programma è corretto, è che una teoria della verità puramente duplicativa è sbagliata anche nelle scienze empiriche e che pure in esse entrano dei criteri di verità in parte «estetici». Ancora piú importante è il fatto che, mentre la prima reazione a una tale spiegazione della verità matematica (per non parlare della verità empirica) può essere quella di ricadere nel relativismo quineano, alla lunga, come io credo, quanto piú si lavorerà nel campo della matematica e della teoria degli insiemi, tanto meno spesso si avrà l'impressione che ci sia una vera «scelta» fra i sistemi da accettare. L'osservazione di Wang secondo cui si ha l'impressione di «essere costretti ad accettare» gli assiomi può in tal modo trovare una spiegazione.

Questo punto di vista ha delle affinità con numerose delle posizioni discusse. Il suo debito nei confronti dell'olismo di Quine è ovvio. È affine all'intuizionismo in quanto abbandona l'idea che la verità sia indipendente perfino dalla verificazione ideale, ma lascia cadere l'idea che esistano nella mente strutture fissate a priori. Si accorda bene con il modalismo e con l'insistere dei logicisti sul fatto che la spiegazione della verità logica e della verità matematica deve essere unitaria. Forse è perfino «wittgensteiniano»...

Inoltre, esso non cade necessariamente nel puro idealismo o fenomenismo. Non nega che esista un «mondo reale», né afferma che tutto ciò che «esiste realmente» siano le sensazioni e le loro relazioni (anche le sensazioni fanno parte della «trama della credenza»). Ciò che afferma, piuttosto, è che la conoscenza è necessariamente una rappresentazione del mondo, non un *Doppelgänger* del mondo, e che ogni rappresentazione deve essere il prodotto congiunto del mondo e della psicologia umana (o della psicologia alpha-centauriana, o della psicologia betelgeusiana, o...) Cosí, il nostro punto di vista è un kantismo attenuato. È kantiano in quanto insiste sulla dipendenza dalla mente di ogni conoscenza, ma empirista in quanto rifiuta la distinzione kantiana fra mente trascendente e mente empirica e l'impossibile «sintetico a priori». Lungi dall'essere antirealista, sostengo che questo punto di vista è perfino compatibile con una

certa versione della teoria della verità come corrispondenza, anche se non con quella che sostiene la piena bivalenza.

Sebbene anche questo approccio possa «non funzionare», sembra chiaro che ciò di cui si ha bisogno nella filosofia della matematica sono ricerche che siano *filosofiche* e non soltanto tecniche. Ricerche sui fondamenti filosofici dell'intuizionismo, ricerche sulla storia della matematica che gettino luce sui processi in base ai quali la matematica cresce e si modifica, ricerche sul «ragionamento plausibile» in matematica, sono alcuni dei settori che invitano allo studio. Ma soprattutto, la filosofia della matematica, come la filosofia della scienza in generale, deve collegarsi con la filosofia del linguaggio e in modo particolare con la discussione della profonda questione metafisica del realismo come teoria della verità e della referenza. [H. P.].

Boole, G.
1847 *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay toward a Calculus of Deductive Reasoning*, Macmillan Barclay and Macmillan, Cambridge (trad. it. Silva, Milano 1965).

Cohen, P.
1966 *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York (trad. it. Feltrinelli, Milano 1973).

Davis, M.
1977 *Applied Nonstandard Analysis*, Wiley, New York.

Frege, G.
1879 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle (trad. it. in *Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino 1965).
1893-1903 *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, 2 voll., H. Pohle, Jena (trad. it. parziale *ibid.*).

Gödel, K.
1940 *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton N.J. 1951².

Heijenoort, J. van
1967 (a cura di) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

Parsons, Ch.
[1975] *What is the Iterative Conception of Set?*, in R. E. Butts e J. Hintikka (a cura di), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory (Proceedings of the Fifth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, London, Ontario, Canada 1975, Part I)*, Reidel, Dordrecht 1977, pp. 335-67.

Peano, G.
1888 *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Bocca, Torino.

Putnam, H.
1967 *Mathematics without Foundations*, in «Journal of Philosophy», LXIV, pp. 5-22.
1975 *What is Mathematical Truth*, in *Philosophical Papers*, I. *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, New York.

Quine, W. van Orman
1969 *Ontological Relativity*, Columbia University Press, New York.

Russell, B.
1967 *The Autobiography of Bertrand Russell*, I. *1872-1914*, Allen and Unwin, London (trad. it. Longanesi, Milano 1969).

Russell, B., e Whitehead, A.
1910 *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wang, H.
1974 *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Whitehead, A. N.
1898 *A Treatise on Universal Algebras with Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zermelo, E.
1907 *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Mathematische Annalen», LXV, pp. 261-81.

Per molto tempo la logica, con l'**etica** e la **metafisica**, ha fatto parte della filosofia (cfr. **filosofia/filosofie**). All'incirca da un secolo essa è legata soprattutto alle **matematiche**. Il legame, tuttavia, non è con una **totalità** indivisa, ma si dà in modo determinato ed articolato, originando nuovi campi di ricerca (cfr. **formalizzazione**, **referenza/verità**, **ricorsività**, **spiegazione**, e anche **insieme**), oppure riproponendo nuove tematiche in luoghi abitualmente connessi con la logica (cfr. **assioma/postulato**, **deduzione/prova**, **induzione/deduzione**). Ma la logica si collega anche ad aspetti della matematica apparentemente piú lontani, appare nella dialettica **locale/globale**, nella considerazione dell'**infinitesimale** (cfr. anche **infinito**) ed investe larga parte dell'algebra (cfr. anche **modello**, **strutture matematiche**).

Nuovi ed importanti aspetti della logica sono apparsi in connessione al **calcolo** e alle problematiche legate agli elaboratori (cfr. anche **macchina** e, per gli aspetti algebrici, **automa**), nel rapportarsi della logica con il **linguaggio** (cfr. anche **grammatica**).

D'altra parte le ricerche logiche hanno svolto un importante ruolo nei dibattiti contemporanei intorno alla **conoscenza**, e, in particolare, intorno alle teorie della **scienza** (cfr. **empiria/esperienza**, **induzione statistica**, **paradigma**, **verificabilità/falsificabilità**), riproponendo decisivi problemi filosofici (cfr. **astratto/concreto**, **concetto**, **dialettica**, **esistenza**, **universali/particolari**).

Possibilità/necessità

L'impiego da parte dei logici e dei filosofi delle nozioni di possibilità e necessità risale ad Aristotele. In epoca moderna Leibniz fece largamente uso del concetto di «mondo possibile». Eppure le basi epistemologiche e metafisiche di queste nozioni rimangono oscure.

Benché i filosofi empiristi abbiano tentato di ridurre la necessità alla necessità linguistica, o addirittura di bandirla completamente dalla filosofia, queste nozioni hanno dimostrato, come altri concetti filosofici ricorrenti, di essere estremamente resistenti. (Alcuni filosofi direbbero che sono erbacce resistenti). In anni recenti la logica modale, la semantica dei mondi possibili (una teoria dovuta a Richard Montague che è collegata a ciò che qui si discuterà, pur uscendo dai limiti del presente articolo), l'argomento delle «essenze», e la teoria dei condizionali controfattuali hanno tutti incontrato un forte seguito. In effetti, i concetti di necessità e possibilità sono oggi al centro di una riconsiderazione filosofica senza precedenti.

In questo articolo, dapprima si discuterà lo strano argomento della logica dei quanti, che ben illustra il caso dell'abbandono totale della nozione di necessità (nel senso dell'apriorità), e poi si esamineranno due esempi significativi del recente lavoro sulla nozione non epistemica di necessità, la necessità metafisica, come è pomposamente chiamata. Si tratta, rispettivamente, delle teorie di Saul Kripke e di David Lewis, precorritrici dell'attuale risveglio di interesse per i discorsi su mondi possibili e verità metafisicamente necessarie.

1. *La logica dei quanti e l'a priori.*

L'idea tradizionale che logica e matematica siano discipline a priori, cioè discipline che assicurano una conoscenza a priori, è stata in anni recenti attaccata in una direzione imprevista. Neumann e Birkhoff hanno suggerito [1936] che un modo di considerare la meccanica quantistica possa consistere nel vedere la logica del mondo fisico (com'è descritta da questa teoria) come una logica non classica. Il suo biografo Ulam riferisce che Neumann attribuiva grande importanza al lavoro in questa direzione, anche se, durante la seconda guerra mondiale, lo alternò con il lavoro su altri progetti. Dopo il 1960 alcune pubblicazioni di Putnam, Bub, e Finkelstein portarono a un risveglio di interesse verso questa direzione, e oggi si conducono molte ricerche in merito. A prima vista, questa proposta sembra avere effetti devastanti sull'idea che esista una cosa come la verità necessaria *tout court*; se persino la logica si dimostra empirica, perché non dovrebbe essere smantellata l'idea stessa di «necessità»? Forse la conoscenza empirica è la sola conoscenza; forse persino la logica e la matematica sono rami della conoscenza empirica. O cosí potrebbe sembrare.

I particolari matematici della logica dei quanti sono troppo complessi per

esser qui illustrati. (Per chi conosce la meccanica quantistica: l'idea è che ci sia una corrispondenza biunivoca fra le proposizioni concernenti un dato sistema fisico S e i sottospazi dello spazio di Hilbert usato per rappresentare quel sistema. Le operazioni logiche di disgiunzione, di congiunzione e di complementazione corrispondono rispettivamente a prendere in considerazione l'intersezione, lo spazio generato e il sottospazio ortogonale. Per i logici: un qualunque reticolo modulare ortocomplementato è un modello per la logica dei quanti. I modelli di interesse fisico sono i reticoli di sottospazi di spazi di Hilbert a infinite dimensioni). Tuttavia lo spirito dell'idea di Neumann può forse essere illustrato da due esempi.

È ben noto che in meccanica quantistica la posizione di una particella è normalmente incerta. Per esempio, la posizione di un elettrone in orbita attorno ad un nucleo è incerta. Non solo, ma questa incertezza sembra essere qualcosa di piú di una semplice ignoranza da parte nostra di dove l'elettrone sia: sotto un certo aspetto è come se l'elettrone si spandesse a macchia d'olio nelle sue possibili collocazioni. In effetti questo comportamento «a macchia d'olio» è ciò che spiega il fatto che gli atomi non coincidono con un punto matematico, come dovrebbero secondo le leggi della fisica classica. Un'illustrazione di quest'incertezza è data dal famoso «esperimento delle due fenditure». In quest'esperimento, delle particelle (fotoni o elettroni o qualunque altra particella della meccanica quantistica) vengono emesse da una sorgente puntiforme. Fra le particelle (ad esempio fotoni) e il rivelatore (ad esempio una lastra fotografica) è posta una barriera sotto forma di una parete con due sottili fenditure. L'incertezza nella posizione del fotone permette che *ogni* fotone interagisca con *entrambe* le fenditure, di modo che quanto si ottiene sulla lastra fotografica non è semplicemente la somma di ciò che si otterrebbe effettuando l'esperimento prima con la fenditura sinistra aperta e poi con la fenditura destra aperta. Piuttosto, è come se metà del fotone passasse attraverso la fenditura sinistra e metà attraverso la destra e poi le due metà si mescolassero e interferissero l'una con l'altra (allo stesso modo delle onde – infatti, a questo fenomeno ci si riferisce spesso come all'«aspetto ondulatorio» del fotone). Eppure, a dispetto di questo comportamento ondulatorio, ogni singolo fotone colpisce l'emulsione in uno e un solo punto definito. Non si è mai riusciti a dimostrare che il fotone sia fisicamente «sparso», facendogli colpire l'emulsione in modo da lasciare un cratere a macchia o qualche altra prova di un urto con qualcosa spazialmente esteso; solo le frange d'interferenza ci obbligano a inferire che il fotone avesse un'estensione spaziale mentre noi non interagivamo con esso. (Come nella vignetta di Charles Addams, uno sciatore sta scendendo lungo una pista, e le sue tracce passano ai lati opposti di un grande albero. Noi non *vediamo* lo sciatore passare attraverso l'albero – non abbiamo mai visto una cosa simile, né la vedremo mai – ma le tracce sembrano obbligare l'inferenza che lo sciatore sia passato attraverso l'albero prima che guardassimo).

Usiamo ora le lettere proposizionali p, q, r per rappresentare i tre enunciati: 'Il fotone colpisce l'emulsione nel punto R', 'Il fotone è passato attraverso la fenditura di sinistra' e 'Il fotone è passato attraverso la fenditura di destra'. Nella

logica di Neumann 'Il fotone è passato attraverso la fenditura di destra o attraverso quella di sinistra' è rappresentato esattamente come nella logica classica (cfr. l'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*), e cioè $(q \vee r)$. L'enunciato 'Il fotone è passato attraverso la fenditura sinistra e ha colpito R' e l'enunciato 'Il fotone è passato attraverso le fenditura destra e ha colpito R' (che, nella logica classica, sarebbero rispettivamente $(p \,\&\, q)$, in breve pq, e $(p \,\&\, r)$, in breve pr) non sono ammessi; la logica di Neumann non consente neppure di chiedersi attraverso quale fenditura sia passato il fotone, in quanto non permette che certe proposizioni, cosiddette «incompatibili», siano congiunte tra loro. Come se le proposizioni p e $(q \vee r)$ avessero una congiunzione, pur non avendola le proposizioni p, q e le proposizioni p, r. In effetti, questo è esattamente il modo in cui alcuni filosofi della meccanica quantistica pensano che le cose vadano.

Evidentemente si devono abbandonare alcune regole della logica classica. In effetti, la legge di introduzione della congiunzione (da qualsiasi coppia di proposizioni p, q inferire la loro congiunzione $(p \,\&\, q)$) dev'essere ristretta alle coppie di proposizioni compatibili p, q, e la legge distributiva $p \,\&\, (q \vee r) \equiv pq \vee pr$ dev'essere ristretta ai casi in cui tutte e tre le proposizioni p, q, r sono «totalmente compatibili» (il che significa che esiste un sottoreticolo del reticolo modulare che è esso stesso un'algebra di Boole e contiene p, q, r). Il fatto che esista una proposizione come $p \,\&\, (q \vee r)$ benché non esistano proposizioni come pq e pr è la rappresentazione logico-quantistica della natura a macchia d'olio del fotone nell'esperimento precedente.

Il secondo esempio non è un esperimento (pur se potrebbe esserlo), ma un calcolo eseguito da due logici, Kochen e Specker [1968]. Kochen e Specker descrivono un sistema (un atomo di ortoelio nel suo stato di minore eccitazione, in un campo magnetico a simmetria romboidale!) con la seguente sorprendente proprietà: se si misurano le tre componenti di spin rispetto a tre direzioni qualsiasi tra loro perpendicolari, J_x^2, J_y^2, J_z^2 forniscono 1, 1, 0 oppure 1, 0, 1 oppure 0, 1, 1. Ciò che rende sorprendente questo risultato è il fatto che esso sembra esplicitamente contraddire un teorema, dovuto a Gleason, per il quale non c'è alcun modo di assegnare i valori zero e uno a tutti i punti di una sfera in maniera tale che per ogni terna ortogonale di punti della sfera due punti abbiano valore uno e uno abbia valore zero!

Kochen e Specker trovarono che il paradosso poteva essere affermato senza riferirsi al teorema di Gleason ora ricordato. Riuscirono a trovare 117 direzioni nello spazio (il lettore se le può immaginare come 117 segmenti di retta di lunghezza unitaria che s'incontrano in un punto) che presentavano la stessa rilevante proprietà dell'intera sfera: non c'è alcun modo di assegnare 117 valori zero e uno (uno per ogni segmento) in maniera che, per ogni terna di segmenti ortogonali (segmenti che formano tre angoli retti) facenti parte dei 117, vi siano nella terna due segmenti cui è stato assegnato valore uno e un segmento cui è stato assegnato valore zero. (Le 117 direzioni in questione sono piuttosto ricche di terne ortogonali; in effetti, è possibile formare 63 terne ortogonali coi 117 segmenti dati). Secondo la meccanica quantistica, per ognuna delle 63 terne che si possono ricavare dalle 117 direzioni, vi sono tre componenti di spin al quadrato

di cui due valgono uno e uno vale zero; ma secondo la logica classica ciò è impossibile.

Secondo la logica è infatti possibile pensare le 117 direzioni nello spazio come lettere proposizionali, $p_1, p_2, \ldots, p_{117}$. (Si pensi p_i come l'enunciato che la componente di spin al quadrato nella i-esima direzione vale uno.) Allora le 63 terne ortogonali corrispondono a certe terne della collezione di tutte le terne che è possibile formare usando queste lettere; e, se i_1, i_2, i_3 è la i-esima terna ortogonale, allora l'enunciato per cui due delle componenti di spin al quadrato valgono uno e una vale zero è esattamente la proposizione $(p_{i(1)}p_{i(2)}\bar{p}_{i(3)} \vee p_{i(1)}\bar{p}_{i(2)}p_{i(3)} \vee \vee \bar{p}_{i(1)}p_{i(2)}p_{i(3)})$. L'impossibilità combinatoria di assegnare due valori uno e un valore zero a tutte le 63 terne ortogonali equivale alla falsità tautologica della formula del calcolo proposizionale che si ottiene congiungendo 63 formule del tipo appena illustrato.

La soluzione di questo paradosso della logica quantistica è estremamente elegante (come Kochen e Specker hanno sottolineato). Nella logica di Neumann («logica quantistica»), la formula del calcolo proposizionale che afferma l'impossibilità combinatoria di assegnare 117 valori uno e zero in modo che ognuna delle terne che interessano abbia due valori uno e un valore zero non è valida. In altre parole, la congiunzione delle 63 formule: $(p_{i(1)}p_{i(2)}\bar{p}_{i(3)} \vee p_{i(1)}\bar{p}_{i(2)}p_{i(3)} \vee \vee \bar{p}_{i(1)}p_{i(2)}p_{i(3)})$ che è tautologicamente falsa nel calcolo proposizionale classico e non-contraddittoria nella logica di Neumann! Ciò che qui si suggerisce è che fatti che sono letteralmente impossibili secondo il calcolo proposizionale classico possono accadere e in effetti accadono, e che questo è quanto si osserva nel caso descritto da Kochen e Specker.

Questo paradosso può anche essere risolto seguendo le idee dell'interpretazione tradizionale della meccanica quantistica (la cosiddetta «interpretazione di Copenhagen») di Bohr e Heisenberg. Secondo quest'interpretazione, la meccanica quantistica non dice che valore assumono i parametri fisici mentre non vengono misurati; predice solo i risultati che le misurazioni otterranno in ben definite situazioni sperimentali. Cosí la formula $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = 2$, ad esempio, che è coinvolta nell'esperimento descritto da Kochen e Specker, non significa che le tre componenti al quadrato, sommate, diano due (e quindi che due di esse debbano valere uno e una debba valere zero, visto che questi sono i due valori consentiti), ma solo che si troverà che la somma è due se si effettua la misurazione, e che si troveranno due valori uno e un valore zero se si effettua la misurazione. Ma se si misura una terna non si misurano le altre, a causa delle relazioni d'incompatibilità; cosí da questo punto di vista non c'è contraddizione con la logica classica; è soltanto una sorta di miracolo che le componenti di spin al quadrato assumano i valori giusti quando noi guardiamo.

Il punto di vista della logica dei quanti non è incompatibile con quello dell'interpretazione di Copenhagen (e lo stesso Neumann sembra aver accettato entrambi). Ma a qualcuno sembra insoddisfacente che la meccanica quantistica debba tracciare una distinzione fra «valori misurati» e «valori non misurati», dal momento che questi ultimi sono senza significato fisico. Se questa distinzione è imposta solo dalla logica classica, questa è parsa ad alcuni una buona ragione per

cambiare la logica. In effetti, benché il punto di vista della logica quantistica sia accettato solo da una piccola minoranza di fisici, per non parlare dei filosofi e logici della fisica, il suo fascino crescente è forse dovuto a una certa riconciliazione fra operazionismo e realismo; l'eliminazione della distinzione fra «valori misurati» e «valori non misurati» piace sia ai filosofi di indirizzo operazionista sia a quelli di indirizzo realista; ai primi perché «valori non misurati», che non possono esser legati a quelli misurati da nessuna teoria, sono privi di significato anche dal punto di vista operazionista piú cauto, e ai secondi perché piace l'idea che i valori «reali» (misurati o meno) siano ciò che le teorie fisiche descrivono e collegano.

Nel 1951, riferendosi non alla proposta di Neumann, di cui non era a conoscenza, ma ad una tecnicamente inferiore dovuta a Reichenbach, di usare una logica a tre valori per interpretare la meccanica quantistica, Quine si poneva la domanda retorica: «Come potrebbe una simile rivoluzione scientifica esser diversa da quella in cui Copernico sostituí Tolomeo, Darwin Aristotele, o Einstein Newton?» E si rispondeva che *non ne differiva*, che cambiare la geometria per semplificare la teoria fisica, com'è stato fatto nell'adottare la teoria einsteiniana della relatività generale, e cambiare la logica per lo stesso scopo, come proposto da Reichenbach (naturalmente, Quine non si poneva il problema se questa proposta semplificasse realmente la teoria fisica in misura significativa), sono cambiamenti dello stesso tipo. Nessuno dei due è proibito dalla metodologia scientifica. Le leggi della logica, sotto questo aspetto, sono altrettanto empiriche di quelle della geometria, solo piú astratte e meglio protette. La logica è l'ultima cosa che saremmo disposti a rivedere, dal punto di vista di Quine, ma non è immune da revisioni.

Se Quine ha ragione, la «verità necessaria» è un altro famoso soggetto che non ha oggetto. La discussione può fermarsi qui. Ma, come sempre accade, le cose non sono cosí semplici.

Prima di tutto, anche se alcune leggi della logica risultano essere empiriche (o avere presupposti empirici), non ne consegue che lo siano tutte. Nessuno ha proposto di rivedere il principio di contraddizione. E che senso avrebbe abbandonare l'enunciato 'Non tutte le proposizioni sono sia vere che false'? [cfr. Putnam 1968]. L'ambito dell'a priori va effettivamente restringendosi, ma il proclamare che ogni verità è empirica è ancora ben lontano dall'essere una tesi accettabile o anche solo coerente.

In realtà, anche la discussione che si è sollevata sulla revisione delle leggi logiche ha una forte componente a priori. Il nostro linguaggio, dopo tutto, fu dapprima usato per parlare di semplici collezioni finite (il gregge nel prato) e la nostra logica fu dapprima formalizzata rispetto a idealizzazioni che qualunque studente che si accosti alla logica riconosce come estremamente rigide (anche se l'insegnante ha dimenticato che sono idealizzazioni), per esempio che tutti i predicati siano perfettamente ben definiti. Se si sta realmente parlando di una collezione finita e i predicati sono davvero ben definiti e controllabili, la differenza, per esempio, tra una posizione realista e una intuizionista o verificazionista sulla verità può essere ignorata. Ma chi pensi aprioristicamente che la nozione classica di verità sia sbagliata, e che la legge del terzo escluso non vale quando ci si occupa di predicati non decidibili, sarà portato, come fu Brouwer, a sfidare la logica classica. E questo è infatti il modo in cui nacque la logica intuizionista. La logica intuizionista è ciò che si ottiene se si identifica la verità con la dimostrabilità costruttiva, e non con qualche sorta di «corrispondenza con la realtà» totalmente non epistemica.

Ancora, sia la logica classica sia quella intuizionista presuppongono che la decidibilità delle diverse proposizioni sia indipendente: per la logica classica sarebbe piú corretto dire che la «decidibilità» non è un risultato, lo è solo la verità assoluta, e la verità, o la falsità assoluta di una proposizione dotata di senso è una proprietà che la proposizione ha, sia o meno decidibile; per la logica intuizionista, oggetto di studio è stato principalmente il linguaggio matematico, finora, e in matematica pura la decidibilità di una proposizione non pregiudica mai la decidibilità di un'altra proposizione. (La «semantica della teoria dei giochi» di Hintikka e la «concezione operativa» di Lorenzen rappresentano estensioni al linguaggio empirico d'un punto di vista collegato all'intuizionismo). Ma nel mondo reale può accadere, in forza del principio d'indeterminazione, che la decidibilità di una proposizione renda impossibile la decidibilità di un'altra per mezzo d'una misurazione che abbia un qualche valore predittivo. C'è una relazione d'«incompatibilità» fra proposizioni.

Ian Hacking della Stanford University ha recentemente scoperto (comunicazione non pubblicata) che esiste un'intima connessione tra logica classica, intuizionista e quantistica. Nei termini di una celebre formalizzazione della logica classica, il sistema di «regole d'introduzione» e di «regole d'eliminazione» dovuto a Gentzen, la differenza tra logica classica e quantistica è semplicemente che le formule che costituiscono le premesse per ogni applicazione d'una regola d'introduzione o d'eliminazione devono essere compatibili; è l'introduzione della nuova relazione semantica di compatibilità che rende conto di ciò che è differente nella logica; non c'è differenza nelle regole primitive, in questa presentazione molto naturale, salvo la restrizione appena citata.

Ora, chi è convinto che la verità debba esser collegata alla verificabilità (almeno a una verificabilità idealizzata) potrebbe essere portato sul terreno dell'a priori nello studiare la logica dei quanti, una volta che abbia capito che le proposizioni potrebbero essere «incompatibili», nel senso che la verificazione di una potrebbe, in linea di principio, interferire con la verificazione di un'altra. Non si intende che questo sia il solo modo di portare a studiare o addirittura ad accettare la logica quantistica; ed è certamente un fatto empirico quello per cui c'è questa relazione d'incompatibilità nel nostro mondo. Ma la possibilità accennata illustra il fatto che anche se si decide di accettare la logica dei quanti, ci si potrebbe trovare a farlo in parte per ragioni aprioristiche – e ciò suggerisce ancora una volta che «tutta la verità è empirica» non è la conclusione corretta che si può trarre dal fatto di essere costretti a rivedere la nostra logica per ragioni empiriche. Questo è un punto su cui lo stesso Quine ha molto insistito; negare che esistano enunciati a priori non è la stessa cosa che negare che esista un fattore a priori nelle decisioni scientifiche. Lo stesso Quine ha suggerito che «a priori» e

«a posteriori» possono essere i nomi di fattori presenti nell'accettazione di qualsiasi enunciato, piuttosto che nomi di classi di enunciati. E la teoria di questi due fattori non sarebbe altro che epistemologia normativa; la teoria di ciò che rende gli enunciati degni d'esser razionalmente accettati.

C'è, tuttavia, un modo molto diverso per tentare di salvare la nozione di necessità dall'attacco di Quine. Questi, seguendo i positivisti logici, assume che se esiste una cosa come la necessità, questa avrà un carattere semantico (per esempio «analiticità») oppure epistemico («apriorità»). Si deve a Saul Kripke il merito d'aver reintrodotto nella discussione un tipo molto diverso di necessità, oggettiva e non-epistemica, la *necessità metafisica*, come egli l'ha chiamata.

2. *Kripke e la «necessità metafisica».*

Era una convinzione acquisita in filosofia che la proprietà di essere *P* e la proprietà di essere *Q* non potessero essere una e la stessa a meno che i concetti *P* e *Q* non fossero gli stessi, o, almeno, che fosse analitico che ogni *P* è *Q* e che ogni *Q* è *P*. Ma, come ha sottolineato Putnam [1970], questa fusione di proprietà e concetti renderebbe inesprimibili scoperte scientifiche acquisite, come la scoperta che la grandezza temperatura è la stessa che la grandezza energia molecolare media di traslazione. (Si può dimostrare in effetti che la temperatura non è identica a nessuna proprietà meccanica, in quanto non ci si contraddice nel dire '*x* ha temperatura T ma non ha energia molecolare media di traslazione E' – o quale altra proprietà meccanica si voglia – anche se l'enunciato è sempre empiricamente falso. Cosí, si dovrebbe concludere, la temperatura è semplicemente correlata all'energia molecolare media di traslazione; le due proprietà non possono essere letteralmente identiche. Si confronti la famosa dimostrazione di Moore che il Bene non può essere identico a nessuna proprietà «naturale»!)

L'idea di Putnam era che *esiste* una nozione di proprietà per la quale il fatto che due concetti «sono diversi» (ad esempio la «temperatura» e l'«energia molecolare media di traslazione») non elimina per niente il problema relativo al fatto che le proprietà corrispondenti siano diverse. E non si dà solo il caso che l'identità di proprietà possa essere un fatto empirico: anche l'esistenza di proprietà può essere empirica. Ad esempio, quando uno chiede quante grandezze fisiche fondamentali esistono pone una domanda empirica relativa all'esistenza di proprietà. Un'idea che prese piede nella filosofia del linguaggio poco dopo l'introduzione da parte di Putnam dell'«identità sintetica delle proprietà», e che amplia e chiarisce il discorso appena svolto, è quella di Saul Kripke [1972] delle verità «metafisicamente necessarie» che devono essere apprese empiricamente, «verità necessarie epistemicamente contingenti». L'osservazione di Kripke applicata al caso temperatura / energia cinetica è che, se qualcuno descrive un mondo possibile in cui le persone hanno sensazioni di caldo e di freddo e vi sono oggetti che dànno sensazioni di caldo e di freddo nei quali queste sensazioni di caldo e freddo sono spiegate da un meccanismo diverso dall'energia cinetica molecolare media, noi *non* diciamo che questo qualcuno ha descritto un mondo

possibile in cui la temperatura non è energia cinetica molecolare media di traslazione. Un enunciato vero in tutti i mondi possibili è tradizionalmente detto «necessario». Una proprietà di qualcosa in tutti i mondi possibili in cui questo qualcosa esiste è tradizionalmente detta «essenziale». In questa terminologia tradizionale, Kripke sta dicendo che «la temperatura è energia molecolare media di traslazione» è una verità necessaria, anche se non è possibile conoscerla a priori. L'enunciato è empirico ma necessario. O, per dirla in altri termini, l'essere energia cinetica molecolare media di traslazione è una proprietà essenziale della temperatura. È con la ricerca *empirica* che si è scoperta l'*essenza* della temperatura.

In una certa misura, fenomeni simili si presentano nella stessa matematica pura. Se la dimostrazione di un teorema è molto lunga, la fiducia nel fatto che la la dimostrazione *sia* una dimostrazione dipende da assunzioni empiriche di vario tipo (per esempio che la mia memoria di ciò che è stato dimostrato prima non venga meno e che le righe non cambino forma sul foglio mentre si legge la dimostrazione). Cosí la fiducia – e la fiducia che si è giustificati ad avere – nella proposizione matematica dipende anche da queste assunzioni empiriche. Malgrado ciò, finché si accetta la dimostrazione come una dimostrazione, si accetta la proposizione matematica come vera non soltanto nel mondo reale, ma persino in quei mondi possibili in cui la memoria viene meno, le righe cambiano forma sul foglio, ecc. In breve, si accetta l'enunciato matematico come metafisicamente necessario su basi epistemicamente contingenti. Questo punto è reso piú pregnante dallo sviluppo degli elaboratori elettronici ad alta velocità; l'unica prova finora esistente del teorema dei quattro colori, per esempio, è stata scoperta in parte grazie a una ricerca con un elaboratore, e nella sua interezza non può essere controllata da un matematico che rinunzi all'aiuto dell'elaboratore.

Ciò che Kripke suggerisce, dunque, è 1) che la vecchia idea che la scienza scopre verità necessarie era, in un senso importante, corretta e non sbagliata; 2) che la necessità in questione, la «necessità metafisica», o verità in tutti i mondi possibili, *non* è la stessa cosa che l'apriorità: necessità metafisica ed epistemica sono state riunite ingiustificatamente; 3) che il problema nella filosofia della matematica *non* dovrebbe essere visto come un argomento a favore della non-revisibilità di tutti gli enunciati matematici dimostrati. Neppure la necessità matematica è, in generale, epistemica. (Benché Kripke pensi che la verità della logica classica e forse gli assiomi fondamentali dell'aritmetica, *siano* epistemicamente necessari. Egli ha un atteggiamento notevolmente conservatore verso proposte come la logica dei quanti).

3. *«Indicatori rigidi».*

Kripke fu condotto a queste scoperte di filosofia del linguaggio in parte dal lavoro precedentemente svolto in un ramo della logica matematica, la logica modale, in cui rappresenta la maggiore autorità mondiale. La logica modale amplia la logica classica (cfr. l'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*) mediante

l'aggiunta di un simbolo, il quadrato, per l'operazione di *necessità*, cioè l'operazione che trasforma l'enunciato 'p' nell'enunciato 'È necessario che p'. La cosiddetta logica modale «normale» contiene gli assiomi e le regole (*modus ponens* e sostituzione) del classico calcolo proposizionale, una regola di necessità (per inferire $\Box A$ da A), e un assioma di distribuzione: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Altri assiomi ricorrenti sono $\Box p \rightarrow p$ ('Se è necessario che p, allora p') e $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ ('Se è necessario che p, allora è necessario che sia necessario che p').

Le intuizioni riguardo alla necessità variano, e cosí, in modo per nulla sorprendente, esistono vari sistemi di logica modale. Ciò che Kripke fece fu di portare ordine in questo caos, introducendo la nozione semantica di *modello*, che permette di studiare le proprietà di ognuno di questi sistemi ed evidenziare la differenza tra le varie assunzioni che questi richiedono sulla necessità, come anche di approfondire problemi tecnici sulla completezza dei vari sistemi per le varie nozioni di necessità. Un modello (oggi talvolta chiamato «struttura di Kripke») è un insieme di oggetti chiamati «mondi possibili» (i quali corrispondono ai modelli in senso classico – modelli per la parte non modale del linguaggio; essi determinano quali enunciati non modali sono veri e quali falsi) piú una relazione chiamata «possibilità relativa» o «accessibilità». Il sistema di logica modale piú forte, S_5, si ottiene considerando come una relazione di equivalenza (simmetrica, transitiva e riflessiva) la relazione di accessibilità; il piú debole considerandola semplicemente riflessiva.

La difficoltà (tale da indurre Quine a dubitare della possibilità d'una logica modale quantificata) è sempre consistita nel combinare la logica modale con i quantificatori, cioè con le nozioni (x) ('Per ogni x') e (Ex) ('Esiste un x tale che'). La soluzione di Kripke è, ancora una volta, quella di assumere un insieme di oggetti chiamati «mondi possibili» che sono, strutturalmente, semplici modelli per la parte non modale del linguaggio; in altre parole, ogni mondo possibile determina un universo del discorso a cui i quantificatori si estendono, e le estensioni di tutti i predicati del linguaggio relativo a quell'universo del discorso. E di nuovo esiste una relazione di accessibilità. Ma c'è anche un'altra relazione: la relazione di *identità attraverso i mondi*. Vale a dire, un certo individuo dev'essere *identificato attraverso i mondi possibili*. Mentre i particolari porterebbero sia oltre lo spazio qui a disposizione, sia oltre i limiti del presente discorso, un aspetto di questo problema tecnico è rilevante ai nostri fini.

Si considerino due mondi possibili che contengano entrambi lo stesso individuo, ad esempio Aristotele, e tali che a questo individuo siano assegnati predicati diversi. Per esempio, in uno dei due mondi egli sia nato a Stagira, nell'altro ad Atene. La proposizione 'Il grande filosofo nato a Stagira' si riferisce ad Aristotele nel mondo reale (che si identificherà con il primo dei due mondi possibili appena postulati), ma non nel secondo mondo. In effetti, nel secondo mondo potrebbe addirittura riferirsi a un altro individuo; forse Platone è nato a Stagira nel secondo mondo possibile. Cosí la stessa descrizione «Il grande filosofo nato a Stagira» può denotare individui diversi in diversi mondi possibili. Nella terminologia di Kripke questa descrizione è non-rigida.

E quanto al nome proprio 'Aristotele'? Come viene usato comunemente nel

riferirsi a mondi ipotetici? Quando si dice 'Aristotele avrebbe potuto nascere ad Atene', non si intende semplicemente che qualcuno *di nome* 'Aristotele' avrebbe potuto nascere ad Atene. Invero, quando si dice «Aristotele avrebbe potuto nascere in Cina» verosimilmente si aggiungerà anche «Se fosse nato in Cina, probabilmente non si sarebbe chiamato 'Aristotele'». Ciò che si vuol dire è che *lo stesso individuo* che nacque a Stagira, si chiamava Aristotele, e divenne il piú celebre allievo dell'Accademia platonica, ecc. nel mondo reale, avrebbe potuto nascere ad Atene (o in Cina), si sarebbe potuto chiamare Diogene (o To Fu), ecc. (Nei termini delle strutture di Kripke: questo significa che esistono mondi possibili in cui un individuo che non è designato dalla costante individuale 'Aristotele' in quei mondi, né nell'estensione di 'nato a Stagira' in quei mondi, sta in relazione di *identità attraverso i mondi* con l'individuo chiamato Aristotele nel mondo reale).

Dal momento che il nome 'Aristotele' è in genere usato per riferirsi allo *stesso* individuo quando si parla di mondi non reali (anche nel caso in cui quell'individuo non si chiami Aristotele *in* quei mondi non reali), il nome proprio 'Aristotele' è un indicatore rigido nella terminologia di Kripke.

Si consideri adesso un semplice enunciato di identità, per esempio 'Cicerone è identico a Tullio'. Posto che sia vero nel mondo reale, non ha senso dire che «Esiste un mondo possibile in cui Cicerone e Tullio sono individui diversi». Esistono senza dubbio mondi possibili in cui i *nomi* 'Cicerone' e 'Tullio' sono attribuiti a persone diverse, ma in quei mondi almeno uno dei due individui non è Cicerone (e quindi neppure Tullio), comunque si chiami *in* quel mondo. Se gli indicatori 'Cicerone' e 'Tullio' sono usati rigidamente, allora se 'Cicerone è identico a Tullio' è vero nel mondo reale (o in *un qualche* mondo possibile, in questo caso), allora è vero in *tutti* i mondi possibili. D'altro canto, l'enunciato 'Cicerone è identico a Tullio' è un enunciato empirico. Epistemicamente è «contingente» («sintetico» nella terminologia di Kant) anche se è metafisicamente necessario. (Kripke considera lo statuto epistemico di questo enunciato nei termini della sua celebre «teoria causale» dei nomi propri. L'intenzione nell'usare il nome «Cicerone» è di riferirsi a quella persona cui si riferiva chi ha insegnato a usare questo nome in questo modo. Con questo metodo si ottiene una catena di usi referenziali collegati l'un l'altro, una storia dell'uso referenziale che risale nel tempo. Nel corso di queste trasmissioni il nome potrebbe anche aver cambiato pronunzia, grafia, ecc. Se si ricostruisce la catena fino al primo anello (l'atto del dare il nome), si trova un certo individuo; che questo individuo sia lo stesso che si trova all'origine di quell'altra catena di usi referenziali collegati, che termina con l'attuale uso del nome 'Tullio', è un fatto empirico. Ma il nome 'Cicerone' non è sinonimo della *descrizione* «L'individuo all'origine della catena che termina con il mio uso attuale di 'Cicerone'»; piuttosto si può dire che viene usato «Cicerone» come un indicatore rigido per un certo individuo che si è in grado di identificare mediante la descrizione (non-rigida)).

Dal punto di vista formale, il principio: *se un enunciato di identità che contiene nomi individuali usati rigidamente, $A = B$, è vero in un mondo possibile, allora è vero in tutti i mondi possibili*, segue da una proprietà formale dell'identità attra-

verso i mondi, la transitività. Il punto è che, secondo la logica modale, l'analisi anche dei piú semplici enunciati d'identità porta immediatamente a capire che un enunciato ovviamente sintetico, 'Cicerone è identico a Tullio', deve (posto che sia vero nel mondo reale) essere vero in ogni mondo possibile, essere «metafisicamente necessario», e che quindi possono esistere verità metafisicamente necessarie ed epistemicamente contingenti. Il caso temperatura / energia cinetica molecolare media di traslazione è semplicemente un'applicazione della stessa idea. (Un altro esempio, dello stesso Kripke, è 'L'acqua è H_2O'. È «empirico» che l'acqua *sia* H_2O; ma posto che l'acqua sia H_2O, dev'essere H_2O in ogni mondo possibile. Quando si scopre la composizione dell'acqua nel mondo reale, si scopre anche come una sostanza dev'essere composta per essere acqua, si scopre *l'essenza* dell'acqua).

4. *David Lewis sui condizionali controfattuali.*

Un'applicazione largamente discussa del meccanismo dei mondi possibili, dell'identità attraverso i mondi, ecc. è la teoria di Stalnaker-Lewis dei condizionali controfattuali. Condizionali come 'Se questa lampadina fosse lasciata cadere si romperebbe' e 'Se questa lampadina fosse lasciata cadere si trasformerebbe in cigno' sarebbero entrambi *veri* se fossero simbolizzati correttamente dalla formula logica '$p \Rightarrow q$'; questo perché la tavola dei valori di verità del condizionale materiale (cfr. l'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*) assegna il valore di verità *vero* a tutti i condizionali con l'antecedente falso. Piuttosto di accettare una conclusione cosí controintuitiva, i logici matematici riservano questa forma logica per la rappresentazione simbolica dei normali condizionali indicativi (ad esempio, 'Se faccio cadere la lampadina, si romperà', usato in un contesto in cui non so se la lampadina verrà fatta cadere, e in cui l'interesse per la predizione viene a mancare una volta che sia noto che l'antecedente non è vero). Il condizionale indicativo esprime accuratamente ciò che si potrebbe chiamare «l'affermazione condizionata» di q (condizionata all'assunzione di p); il considerarlo «vero» quando p è falso può esser visto come un qualcosa di analogo al considerare il numero uno la «0-esima potenza» di 2; è qualcosa che a prima vista sembra arbitrario, ma in realtà è imposto dal desiderio di mantenere valide certe leggi matematiche o logiche.

Il problema è che, quando si parla di «ciò che sarebbe successo se», non si sta *asserendo condizionatamente che la lampadina si romperà* (o si trasformerà in cigno), condizionatamente al fatto che venga lasciata cadere; un'asserzione che perde ogni interesse quando ci si renda conto che la lampadina non è stata lasciata cadere; si *sa* che la lampadina non è stata lasciata cadere (ecco perché questo è un condizionale *controfattuale*) e si vuole sapere che cosa è vero nel mondo ipotetico in cui *è* stata lasciata cadere. La risposta, evidentemente, non è da cercare in una semplice conoscenza dei valori di verità di antecedente e conseguente; questo è il motivo per cui, in questi contesti, il condizionale verofunzionale non è un sostituto adeguato del condizionale congiuntivo.

Questo problema è stato discusso per piú di trent'anni ed è forse il piú complesso nel campo dell'analisi logica del linguaggio naturale. (Alcuni logici – come Goodman e Quine – negano addirittura che possa esser risolto; vedono nel condizionale controfattuale una vaghezza irrimediabile e, piuttosto che tentare di analizzarlo, preferirebbero addirittura eliminarlo dal discorso scientifico).

Ciò che David Lewis, elaborando un'idea di Robert Stalnaker [1968], ha proposto [1973], è di analizzare i condizionali controfattuali stabilendo una *metrica* su una struttura di Kripke. Si tratta di pensare i mondi possibili come piú o meno «simili», o piú o meno «vicini» tra loro. Un controfattuale è vero in un mondo solo nel caso che il conseguente sia vero in tutti i mondi possibili piú vicini in cui l'antecedente è vero. Se tutti i mondi possibili, entro una certa distanza dal mondo reale, in cui la lampadina viene lasciata cadere, sono mondi in cui questa si rompe, allora il controfattuale 'Se la lampadina fosse stata lasciata cadere, si sarebbe rotta' è vero.

Il grande pregio di questa proposta è che, se è corretta, consente per la prima volta di determinare quali inferenze relative a un controfattuale sono valide. Per esempio, si può vedere perché l'inferenza

$$\frac{p \Rightarrow q}{\text{(quindi) } pr \Rightarrow q}$$

che è valida per il normale condizionale indicativo ('Se p allora q'; quindi, 'Se p e r allora q') non è piú valida se il condizionale è sostituito da un controfattuale ('Se Jones si fosse gettato dal tetto si sarebbe ammazzato' non implica 'Se Jones si fosse gettato dal tetto e il tetto fosse stato a soli due metri da terra, si sarebbe ammazzato'). Quando si analizza 'Se Jones si fosse gettato dal tetto si sarebbe ammazzato', si pensa ai mondi possibili in cui Jones si è gettato dal tetto. Se tutti i *piú simili* mondi di questo tipo – tutti i mondi di questo tipo «entro una certa distanza» dal mondo reale – sono mondi in cui Jones si ammazza, allora il condizionale è vero. Posto che l'edificio in realtà fosse alto cento metri, e che vengono considerati i mondi in cui l'edificio è alto solo due metri, mondi molto diversi da quello reale, il valore di verità di 'Jones si ammazza', in mondi in cui Jones si getta dal tetto *e* il tetto è a soli due metri da terra, non viene neppur preso in considerazione. Ma il secondo condizionale può esser valutato solo considerando il valore di verità di 'Jones si ammazza' nei piú vicini mondi di quel tipo – non importa quanto possano esser «lontani» dal mondo reale.

Ulteriori applicazioni della teoria dei mondi possibili e della semantica di Stalnaker e Lewis dei condizionali controfattuali sono state svolte da Alvin Plantinga, il cui libro [1974] è una tra le migliori introduzioni a tutto questo campo.

Lo stesso David Lewis assume un atteggiamento estremamente metafisico nei confronti dei mondi possibili: egli crede nella loro esistenza reale (quasi nello spazio fisico). Secondo David Lewis non c'è un particolare mondo reale; «reale» è solo il modo in cui la gente di *ogni* mondo possibile chiama il *proprio* mondo. (Proprio come 'Io' non è il nome di un unico individuo distinto, ma solo il modo in cui *ogni* individuo chiama se stesso). Questa visione ontologicamente strava-

gante non è condivisa da Kripke né da altri che lavorano nel campo, i quali vedono i mondi possibili semplicemente come entità astratte, situazioni ipotetiche, e non come veri «mondi paralleli».

5. *Problemi di «similitudine».*

La nozione centrale nella teoria di Stalnaker e Lewis è quella di similitudine tra mondi possibili. Tuttavia, questa nozione non è priva di aspetti problematici. Si consideri un semplice controfattuale, ad esempio 'Se la matita fosse un piede piú a sinistra, l'immagine della matita nello specchio sarebbe spostata a sinistra' (cioè a «destra» dal punto di vista dell'immagine nello specchio). Quest'osservazione potrebbe occorrere, per esempio, in una discussione di ottica (si immagini una matita posta su un tavolo di fronte ad uno specchio). Se si immagina un mondo in cui le leggi naturali funzionano esattamente come nel mondo reale, ma in cui adesso la matita è un piede piú a sinistra, allora avrebbero dovuto accadere nel passato cose diverse. In effetti, visto che quest'altro mondo sarebbe stato diverso da quello reale indietro nel tempo finché si vuole, e visto che questi diversi avvenimenti passati avrebbero avuto conseguenze sul presente, potrebbe darsi che in quel mondo il parlante non fosse nato, o, in modo piú rilevante, lo specchio potrebbe non esistere, o addirittura essere in un altro posto.

Ciò che questo dimostra, sostiene Lewis, è che quelli che si considerano i «mondi piú simili» allo scopo di calcolare il valore di verità di *questo* controfattuale *non* sono mondi in cui le leggi naturali funzionano (senza eccezioni) come nel mondo reale. Ciò che si fa nell'immaginazione, consiste nel considerare un mondo che è esattamente uguale al mondo reale fino a, per esempio, un secondo prima. Si immagina che in quel momento, un secondo prima, avvenga un «piccolo miracolo», e la matita si sposti magicamente di un piede a sinistra. In breve, si massimizza la similitudine col mondo reale rendendo vero l'antecedente del controfattuale per cui la matita è un piede piú a sinistra, «armeggiando» col mondo reale in un punto (un secondo prima), e lasciando poi operare le leggi naturali senza ulteriori interferenze di «miracoli».

Questa tecnica del «piccolo miracolo», tuttavia, dà dei problemi. Per esempio, la luce impiega del tempo per andare dalla matita allo specchio. E cosí, se il mondo piú simile a quello reale, in cui la matita è un piede piú a sinistra, è quello in cui è appena accaduto il «piccolo miracolo» appena descritto, sembrerebbe che il controfattuale 'Se la matita fosse un piede piú a sinistra, allora un secondo fa la sua immagine sarebbe stata esattamente dov'è' dovrebbe esser vero (perché sarebbero ancora i raggi emessi prima del «piccolo miracolo» a produrre l'immagine un secondo fa), ma intuitivamente questo controfattuale è falso, non vero.

La risposta di Lewis, questa volta, consiste nel dire che il «piccolo miracolo» dipende dal controfattuale che si sta considerando. (Per esempio, non è vero che 'Se la matita fosse stata un piede piú a sinistra, allora un secondo fa gli astanti avrebbero esclamato che era avvenuto un piccolo miracolo: la matita si era mossa', perché, se si considera questo controfattuale, si immagina un mondo possibile in cui la matita magicamente ha cambiato posizione di un piede ed è cambiato contemporaneamente il ricordo dei presenti sulla posizione precedente della matita – o, forse, si arretra maggiormente nel tempo il «piccolo miracolo»). Dato che il «piccolo miracolo» è determinato dalla metrica della similitudine e viceversa (il mondo che si cerca è il «piú simile» al mondo reale in senso forte) questo significa che vengono usate metriche di similitudine diverse per controfattuali diversi – anche per controfattuali diversi con lo stesso antecedente.

In particolare, se si parla di dove sarebbe stata un secondo fa l'immagine nello specchio, si arretra nel tempo il «piccolo miracolo» – supponendo di sapere che la luce impiega a spostarsi un tempo finito.

A questo punto si incappa in un possibile ostacolo per la significanza di ciò che Stalnaker e Lewis hanno fatto – *l'accusa di vaghezza*. La «metrica di similitudine» non è ovviamente una metrica oggettiva nello stesso senso in cui spesso la metrica dello spazio-tempo è ritenuta oggettiva. È soggettiva, determinata dalle nostre intuizioni sulla relativa vicinanza tra mondi possibili. E queste intuizioni fluttuano, come ammette lo stesso Lewis. È dunque possibile dubitare che i controfattuali abbiano realmente un chiaro valore di verità, anche ammesso che questa teoria sia corretta; forse si è solo spiegata l'oscurità con l'oscurità.

Va a questo punto sottolineato il fatto che Lewis è un rigido realista metafisico. (Già si è riportata la sua interpretazione realista dell'esistenza dei mondi possibili). Lewis sottoscrive la teoria della corrispondenza della verità; considera gli enunciati come veri o falsi – assolutamente veri o assolutamente falsi (esclusi naturalmente i casi di inconsistenza o vaghezza) – e non importa se gli uomini sono, o saranno, in grado di scoprire di quali si tratta. E questo realismo si estende anche ai controfattuali; egli ritiene di definire il valore di verità di un controfattuale (in questo senso realista) e non la sua asseribilità o la sua accettabilità razionale. Ma si può definire una nozione di *valore di verità*, in questo senso fortemente realista, in termini di una metrica di similitudine (o di una collezione di metriche di similitudine) dichiaratamente soggettiva?

È da notare che, nei nostri esempi, la necessità di conoscere le leggi di natura rilevanti si è manifestata due volte. Nel caso del secondo controfattuale, 'Se la matita fosse un piede piú a sinistra, allora un secondo fa la sua immagine sarebbe stata esattamente dov'è', la tecnica di Lewis richiede un «piccolo miracolo» un poco prima di un secondo – cosí la luce avrà tempo di raggiungere lo specchio dalla nuova posizione. (Altrimenti il controfattuale risulterebbe vero, e non falso, mentre è chiaramente falso). Ma questo richiede qualche conoscenza della velocità della luce. In generale, si devono conoscere le leggi della fisica per sapere dove e quando inserire il «piccolo miracolo». E di nuovo si devono conoscere le leggi della fisica per calcolare le conseguenze del «piccolo miracolo» nella situazione ipotetica.

Ora, è perfettamente possibile che le leggi della fisica che interessano possano arrivare a riferirsi a microstrutture come i *quarks* e anche oltre. In effetti, può anche darsi che le leggi profonde della fisica non siano mai intelligibili all'uomo. Che la nostra metrica di similitudine tenga conto di differenze di complessità arbitraria tra mondi possibili – differenze per le quali si può anche non avere

«intuizione» *alcuna*, giacché non si può neppure concettualizzarla – sembra un fatto inaccettabile. Naturalmente questo è solo un ampliamento della accusa di vaghezza.

Tuttavia, se ci si rassegna ad abbandonare il progetto di definire il valore di verità di un controfattuale e ci si accontenta di stabilire le condizioni di *asseribilità fondata* o di *accettabilità razionale*, allora a chi scrive sembra che le idee di Lewis possano essere utili. Nella situazione attuale, difficilmente si possono considerare come una soluzione al problema di costruire una semantica dei controfattuali; ma rappresentano senza dubbio un contributo importante.

6. *Problemi dell'«essenza».*

Kripke sostiene che dopo aver scoperto che la composizione dell'acqua nel mondo reale è H_2O, rifiutiamo di chiamare «acqua» ipotetiche sostanze di composizione differente, anche se le loro (ipotetiche) proprietà superficiali fossero simili a quelle dell'acqua; e questo sembra corretto. Ma l'affermazione che l'enunciato 'L'acqua è H_2O' sia vero in tutti i mondi possibili potrebbe essere troppo rigida. Si consideri un mondo possibile in cui l'acqua esista solo sotto forma di molecole H_6O_3; Kripke potrebbe obiettare che l'esempio è inadeguato: 'L'acqua è H_2O' è una semplificazione già nel mondo reale (molecole come H_4O_2, H_6O_3 esistono realmente), e la sua teoria sostiene che la composizione dell'acqua nel mondo reale determina la composizione in tutti i mondi possibili. Ma anche se, per esempio, $H_{20}O_{10}$ non esiste nel mondo reale, è probabile che si chiamerebbe «acqua» una sostanza avente proprietà simili a quelle dell'acqua e composta di molecole $H_{20}O_{10}$ in qualche mondo possibile.

Ancora, si consideri un mondo possibile in cui le leggi fisiche siano lievemente diverse e in cui idrogeno e ossigeno non esistano separatamente. Ciò che viene chiamato «atomi d'ossigeno» e «atomi d'idrogeno» non sono stati stabili, ma lo è la «molecola H_2O». È chiaro che l'*acqua* esiste in quel mondo; ma non è affatto chiaro che 'L'acqua è H_2O' sia vero in quel mondo (perché non esistono in *quel* mondo sostanze chimiche come idrogeno e ossigeno).

Ciò che Kripke sostiene come corretto è che la scienza fa piú che scoprire semplici correlazioni. La scienza scopre che certe cose *possono* essere, che certe cose *devono* essere, ecc. E una volta che si è scoperto che la composizione chimica dell'acqua nel mondo reale è H_2O (in realtà una sovrapposizione nel senso della meccanica quantistica di H_2O, H_4O_2, H_6O_3, ... piú D_2O, D_4O_2, ...), non si chiama «acqua» una qualunque altra sostanza, ipotetica o reale, a meno che non abbia una composizione simile a questa. Ma «composizione simile» in qualche modo è una nozione vaga; e dire che 'L'acqua è H_2O', o qualunque altra proposizione di questo tipo, è «vera in tutti i mondi possibili» sembra essere una semplificazione eccessiva.

Anche il caso temperatura / energia cinetica molecolare media di traslazione è troppo semplificato. La temperatura *è* energia molecolare media di traslazione nel caso di sostanze che consistono di molecole. Ma il concetto di temperatura è

stato esteso, per esempio alle radiazioni. E chi sa quanto ancora potrebbe venir esteso in applicazione a situazioni ipotetiche. (Parlando in termini di proprietà anziché di «concetti»: è dubbio che la temperatura *sia* la stessa proprietà nei due casi delle molecole e delle radiazioni. Anche l'estensione dai gas, in cui la distribuzione della velocità delle molecole è una distribuzione di Maxwell, a molecole con altre distribuzioni è una complessa conquista della fisica degli ultimi anni del XIX secolo).

Questi esempi suggeriscono che l'«essenza» che la fisica scopre va pensata come una sorta di *paradigma* cui le altre applicazioni del concetto («acqua» o «temperatura») devono *somigliare*, piú che una condizione necessaria e sufficiente valida per tutti i mondi possibili. Il che avrebbe dovuto esser chiaro già fin dalla critica della distinzione analitico/sintetico svolta da Quine. Una nozione come quella di temperatura è regolata da molte leggi, in particolare dalla seconda legge della termodinamica; se si arriva a un mondo possibile in cui le leggi sono differenti di quel tanto che basta a far sí che l'energia media di traslazione delle molecole non obbedisca alla seconda legge, mentre vale per una definizione lievemente diversa, allora la «definizione» di temperatura potrebbe essere cambiata al fine di mantenere la seconda legge. Kripke sottoscriverebbe questo discorso fin tanto che è applicato alla necessità epistemica; ma in realtà questo vale anche per la sua «necessità metafisica», in quanto coinvolge la valutazione di ciò che è una similitudine rilevante al caso paradigmatico.

7. *Kripke e l'«essenza individuale».*

La parte piú controversa della teoria di Kripke, tuttavia, è certamente quella che concerne la nozione di essenza di un individuo.

Si ricordi che nella logica modale di Kripke gli individui possono essere identificati attraverso i mondi possibili: questo è ciò che mette in grado di rappresentare il fatto che Aristotele avrebbe potuto nascere ad Atene anziché a Stagira. Ma chiaramente devono esservi dei limiti: è chiaramente falso che Aristotele avrebbe potuto essere una bottiglia di vetro. Stabilire quali individui in altri mondi possibili siano identici, attraverso i mondi, ad Aristotele, equivale esattamente a determinare cos'è l'*essenza* di Aristotele, quali proprietà un oggetto deve avere per *essere* Aristotele. E che anche *questa* nozione metafisica debba essere riabilitata sembra eccessivo per molti filosofi contemporanei.

La soluzione che Kripke dà al problema dell'essenza individuale consiste nell'assumere come caratteristiche essenziali la composizione e la continuità causale. Cosí, un individuo possibile che proviene dallo stesso ovulo fecondato (cioè da un ovulo fecondato con la stessa composizione e gli stessi atomi) di Aristotele, ma con una storia personale diversa è un possibile Aristotele: un individuo con lo stesso nome, gli stessi tratti caratteriali e lo stesso aspetto fisico, che nasce da un diverso ovulo fecondato, non è Aristotele, ma semplicemente qualcuno che gli somiglia. E se si fossero salvate le tavole della nave di Teseo, e si costruisse una perfetta copia della nave originale, identica per composizione, la copia non

sarebbe la nave di Teseo perché non avrebbe in comune con l'originale il tipo necessario di continuità causale.

Si illustrerà questa teoria con un esempio che Kripke ha spesso usato nelle sue conferenze: si può veridicamente affermare che (posto che ci sia un leggio sul tavolo) 'Questo leggio avrebbe potuto essere dipinto di nero', ma, se «questo leggio» è usato «rigidamente» (cioè se «questo leggio» in realtà significa *proprio questo leggio*), allora 'Questo leggio avrebbe potuto essere fatto di ghiaccio' è falso. Questo leggio, proprio questo, non avrebbe potuto esser fatto di ghiaccio, anche se 'Il leggio sul tavolo avrebbe potuto esser fatto di ghiaccio' è vero se lo si interpreta come 'Avrebbe potuto esserci un leggio di ghiaccio sul tavolo'. («Il leggio sul tavolo», in quest'ultimo enunciato, è ciò che è stato definito una descrizione «non-rigida»; si riferisce a differenti individui in mondi possibili differenti).

A chi scrive non sembra che la teoria di Kripke sia poi *così* metafisica. Sembra piuttosto ciò che Carnap avrebbe chiamato una «esplicazione»; una *convenzione* che ha un qualche fascino intuitivo e che permette di formalizzare un uso preanalitico di asserzioni modali come 'Aristotele avrebbe potuto nascere ad Atene', 'Aristotele avrebbe potuto non essere un filosofo', 'Aristotele non avrebbe potuto essere un calamaio', ecc.

Tuttavia, le intuizioni riguardo a questo tipo di enunciati differiscono molto. Ayer (in una conferenza non pubblicata) ha suggerito che non c'è nulla di sbagliato in un enunciato modale come 'Aristotele avrebbe potuto essere cinese', anche se questo viola la teoria di Kripke.

Ancora, se si ammette che le leggi naturali dicano che cosa può o non può avvenire, perché questo non dovrebbe estendersi alla conoscenza di ciò che gli individui possono o non possono essere o fare? Una volta che si accetta che gli esseri umani siano flussi di materia con una certa continuità causale e una certa organizzazione funzionale, questo non avrà forse ripercussioni sugli enunciati modali che si considereranno veri? Per chi crede nell'anima, non c'è nulla di sbagliato in 'Aristotele avrebbe potuto essere cinese' (la stessa anima avrebbe potuto essere in un corpo cinese); ma se l'Aristotele reale è un flusso di materia con una certa storia causale, allora non avrebbe potuto essere cinese senza avere geni differenti. E un individuo possibile con geni differenti è un individuo differente dall'Aristotele reale. (Oppure, se gli esseri umani nel mondo reale non hanno un'anima separabile dal corpo, allora esseri d'un qualunque mondo possibile dotati di un'anima che può risiedere in diversi corpi, o staccarsi dal corpo, e la cui personalità risieda in quest'anima e non nel cervello, non saranno identici a nessun individuo del mondo reale, anche se gli somigliano. Se non ho un'anima separabile dal corpo nel mondo reale, allora io, proprio io, non posso avere un'anima separabile dal corpo).

Ayer non sarebbe soddisfatto di questa replica, poiché non crede che le leggi naturali dicano che cosa oggettivamente può avvenire o meno; per lui le leggi naturali sono solo generalizzazioni vere nei confronti delle quali noi abbiamo un certo atteggiamento. Naturalmente, questa è poi la visione humeana della necessità naturale; la critica che gli può esser fatta è che non rende giustizia

all'*oggettività* delle leggi naturali. Per esempio, la maggior parte degli scienziati e dei filosofi non sarebbe d'accordo che è solo un enunciato relativo a un nostro «atteggiamento» il fatto di non poter costruire una macchina per il moto perpetuo. Ma questa è una discussione che esula dai limiti del presente discorso.

Bisogna dire che ci sono possibili alternative alla teoria di Kripke all'interno dello stesso ambito generale: per esempio, molti autori hanno suggerito di sostituire la nozione di identità attraverso i mondi con quella di identità *fra specie* (identità ristretta a un predicato, per esempio «uomo», «statua», «pezzo di bronzo»). Di un pezzo di bronzo che in un mondo possibile è forgiato in una statua, e in un altro mondo possibile no, si dirà che è «lo stesso pezzo di bronzo» in entrambi i mondi, ma non «la stessa statua». Non ha senso, per le teorie dell'identità fra specie, chiedere *simpliciter* se due individui sono lo stesso; a questa domanda si deve sempre rispondere: «lo stesso *cosa*»?

Potrebbe anche essere desiderabile tentare un'analisi abbandonando l'assunzione che l'identità attraverso i mondi sia *transitiva*.

8. *Problemi del platonismo.*

Alcuni filosofi recentemente hanno ecceduto con i discorsi sui mondi possibili (alcuni filosofi eccedono ogniqualvolta ci sia una nuova moda in filosofia), e hanno visto la formalizzazione dei mondi possibili come una specie di ricetta mágica per fare progressi in quasi tutti i problemi filosofici. Ciò è deleterio a causa della mancanza di chiarezza della stessa nozione di «mondo possibile». In particolare, se si assume che i mondi possibili siano entità ben definite, astratte o anche concrete (benché il solo David Lewis sembri voler optare per la seconda alternativa) e che ci sia una ben definita totalità di *tutti* i mondi possibili, allora la questione si fa veramente oscura. C'è una totalità definita di *tutti gli oggetti possibili*? Una totalità di *tutti i predicati possibili*? Una totalità di *tutti i pensieri possibili*? Queste totalità non solo sembran destinate a portare ad antinomie (si veda il paradosso di Russell, e quello di Grelling, «il minimo numero non esprimibile con meno di venticinque sillabe» – che si è appena espresso con ventiquattro sillabe!), ma pongono difficoltà epistemologiche formidabili.

Alcuni filosofi evitano queste difficoltà argomentando che, in effetti, se è lecito quantificare su «tutti gli insiemi» nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (cfr. l'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*), allora dev'esser lecito quantificare su «tutti i mondi possibili» nella teoria dei mondi possibili. Ma la teoria degli insiemi è matematica, non *filosofia*. Se si quantifica su «tutti gli insiemi» e si interpreta questa quantificazione in modo ingenuamente platonico, allora salta fuori tutta una serie di problemi da un punto di vista filosofico – in particolare, come si potrebbe avere accesso epistemico a questo iperuranio platonico degli insiemi che si pretende di descrivere. E allo stesso modo, se si quantifica su «tutti i mondi possibili» e si interpreta questa quantificazione in modo ingenuamente platonico, allora come si potrebbe avere accesso epistemico a questo iperuranio platonico dei mondi possibili? Il problema è se

spiegare nozioni problematiche come quelle di modalità e di condizionale controfattuale in termini di una totalità completamente metafisica di «tutti i mondi possibili» costituisca un progresso filosofico, oppure piuttosto un allontanamento dalla chiarezza, dall'analisi, da qualunque tipo di avanzamento epistemologico.

Mentre ai filosofi di tendenza nominalista come Nelson Goodman questo problema sembra una ragione sufficiente per abbandonare completamente, perché filosoficamente irrilevante, la teoria dei mondi possibili, a chi scrive il caso non sembra cosí disperato. Qualunque cosa alcuni filosofi possano pensare dei mondi possibili, il lavoro che si è descritto (che certamente non è privo di aspetti problematici, ma d'altronde il lavoro filosofico per la sua stessa natura non può sperare di non esser problematico) non richiede assunzioni platoniche. Se si pensano i mondi possibili come semplici stati possibili di cose in relazione ad un qualche linguaggio dato (come quelle che Carnap chiamava «descrizioni di stato»), allora non sembrano essere entità eccessivamente sospette e questi mondi possibili collegati al linguaggio sembrano essere sufficienti sia alla teoria di Lewis sui controfattuali (anche se non, forse, nella interpretazione decisamente realista che si è discussa prima), sia per le teorie di Kripke qui esaminate. Ciò che rende sospetti i «mondi possibili» è il tentativo di considerarli indipendenti dal sistema linguistico che si usa per parlare di stati possibili di cose, o «situazioni ipotetiche»; ma perché si dovrebbe fare questo tentativo?

Naturalmente è evidente come la nozione stessa di possibilità non si possa spiegare in termini di mondi possibili. Ma ciò non vuol dire che quanto si è fin qui detto non la chiarisca. Se si assume che i mondi possibili sono fondamentalmente oggetti linguistici (per esempio, insiemi massimalmente consistenti in un qualche linguaggio, o un qualche loro sottoinsieme), allora il lavoro svolto da Kripke ricorda che non *tutti* gli insiemi massimalmente consistenti di enunciati possono esser visti come «mondi possibili». Come non si chiamerebbe «acqua» un liquido reale che si scoprisse domani, se non avesse la stessa composizione dell'acqua, cosí non si descrive come «acqua» un liquido ipotetico se ha una composizione diversa da quella dell'acqua nel mondo reale (oltre i limiti della «similitudine al paradigma» che si è suggerita come riformulazione dei requisiti proposti da Kripke). Cosí i nostri meccanismi referenziali servono non solo a determinare cos'è realmente acqua, ma anche cos'è possibilmente acqua. La scoperta di un legame cosí stretto fra la teoria del significato e la teoria della possibilità forse non dice che cosa *è* la possibilità in un qualche senso valido una volta per tutte, ma rappresenta senza dubbio un contributo fondamentale.

Quel ch'è presupposto, anziché chiarito, in tutto ciò, è la nozione di possibilità logica, e il limite fino al quale sono possibili mondi con logiche diverse. La teoria dei mondi possibili assume la nozione di possibilità logica; non fa nulla per la filosofia della logica. Ma non è un difetto per un'importante idea filosofica quello di non risolvere tutti i problemi. [H. P.].

Kochen, S., e Specker, E. P.
1968 *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, in «Journal of Mathematics and Mechanics», XVII, 1, pp. 59-87.

Kripke, S.
1972 *Naming and Necessity*, in D. Davidson e G. Harman (a cura di), *Semantics of Natural Language*, Reidel, Dordrecht.

Lewis, D. K.
1973 *Counterfactuals*, Harvard University Press, Cambridge Mass.

Neumann, J. von, e Birkhoff, G.
1936 *The logic of quantum mechanics*, in «Annals of Mathematics», serie II, XXXVII, 4, pp. 823-43.

Plantinga, A.
1974 *The Nature of Necessity*, Clarendon Press, Oxford.

Putnam, H.
1968 *Is Logic Empirical?*, in R. S. Cohen e M. W. Wartofsky (a cura di), *Boston Studies in the Philosophy of Science*, V, Reidel, Dordrecht; ora *The Logic of Quantum Mechanics*, in *Philosophical Papers*, I. *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, New York 1975, pp. 174-97.
1970 *On Properties*, in N. Rescher (a cura di), *Essays in Honor of Carl G. Hempel*, Reidel, Dordrecht; ora *ibid.*, pp. 305-22.

Stalnaker, R.
1968 *A Theory of Conditionals*, in J. W. Cornman e altri (a cura di), *Studies in Logical Theory*, Blackwell, Oxford.

Il tipo di **logica** richiesto dalla meccanica quantistica (cfr. **quanti**) sembrerebbe dover portare ad abbandonare la nozione di necessità (cfr. **libertà/necessità, caso/probabilità**), o perlomeno ad avanzare importanti riserve riguardo alla distinzione fra verità analitiche e verità empiriche (cfr. **analisi/sintesi, empiria/esperienza, matematiche**). Non per questo però vengono posti in discussione i principî logici (cfr. **opposizione/contraddizione**); si è, d'altronde, condotti ad accettare la logica dei quanti ancora in base a ragioni parzialmente a priori (cfr. **deduzione/prova**). Recentissimi studi sul concetto di mondo possibile – in logica modale e nella teoria dei condizionali contro fattuali – mostrano l'esistenza di enunciati sintetici (cfr. **proposizione e giudizio**) che possono essere veri nella **totalità** dei mondi possibili. Viene cosí proposta una tesi che definisce la verità (cfr. **vero/falso**) allo stesso tempo come metafisicamente (cfr. **metafisica**) necessaria ed epistemologicamente contingente (cfr. **scienza**). Parallelamente viene riabilitata l'essenza (cfr. **essere**), scorgendovi un **paradigma** delle similitudini del **concetto in questione**. Le obiezioni che si potrebbero sollevare nei riguardi di un nuovo realismo delle essenze (cfr. **universali/particolari**) cadono quando si considerano i mondi possibili come oggetti linguistici (cfr. **semantica**), pur mantenendo un legame fra la teoria della **referenza/verità** e quella del possibile (cfr. **previsione e possibilità**).

Referenza/verità

1. *Russell su referenza e verità.*

Nei *Problems of Philosophy* (1911) Bertrand Russell sostiene che vi sono due tipi di conoscenza: conoscenza per esperienza diretta e conoscenza per descrizione. La conoscenza per esperienza è limitata ai dati sensoriali (per Russell, i dati sensoriali sono essi stessi qualità, e quindi degli universali piuttosto che dei particolari; ma in questa sede i dettagli della sua teoria non sono rilevanti). Secondo Russell i dati sensoriali possono essere colti e denominati *direttamente*; solo nel caso dei dati sensoriali si può essere certi *che* un nome denota, e certi di *che cosa* denota. Russell chiamò questi nomi – nomi di dati sensoriali di cui si ha una conoscenza per esperienza – «nomi logicamente propri».

Delle altre cose si ha conoscenza per descrizione. Posso sapere che ci fu una persona quale Giulio Cesare, anche se non ho una conoscenza per esperienza di Giulio Cesare, in quanto posso descriverlo come «il generale romano che si chiamava 'Giulio', che sconfisse Pompeo, che attraversò il Rubicone, ecc.» (naturalmente, queste clausole dovrebbero essere riformulate in modo da contenere soltanto nomi logicamente propri – un grave intoppo per Russell).

La teoria di Russell può essere riformulata come una teoria sulla referenza dei termini in questo modo:

1) esistono due tipi di termini: primitivi e definiti;
2) i termini definiti sono sinonimi di descrizioni, cioè espressioni della forma «l'unica entità che...» (la celebre «teoria delle descrizioni» di Russell mostra come le descrizioni possano essere tradotte nella notazione della logica simbolica);
3) i termini primitivi si riferiscono a cose cui abbiamo una qualche sorta di accesso epistemico.

Si può anche dire che Russell sostenesse una teoria della verità come corrispondenza, cioè sosteneva che: *a*) le asserzioni corrispondono a stati di cose; sono vere se si dà lo stato di cose corrispondente, false in caso contrario; *b*) la nostra *comprensione* d'una asserzione consiste nella conoscenza di quale stato di cose le corrisponde; *c*) questo aggancio è reso possibile dal fatto che i componenti ultimi di una qualsiasi asserzione sono nomi logicamente propri, e noi abbiamo una conoscenza per esperienza di ciò cui i nomi logicamente propri si riferiscono.

Alcune parti della teoria di Russell si dimostrarono problematiche fin dall'inizio, e furono modificate o abbandonate già da lui stesso. L'idea che tutti gli enunciati significativi possano essere ridotti a enunciati concernenti i dati sensoriali venne in seguito abbandonata. Ma se non si assume che i termini primitivi debbano riferirsi a dati sensoriali e non si precisa la natura dell'«accesso epistemico» in 3), allora molti filosofi avrebbero fino a poco tempo fa sottoscritto 1), 2),

3) (e forse molti lo farebbero ancora oggi). Analogamente, mentre *c*) nella nostra enunciazione della versione russelliana della teoria della verità come corrispondenza fu piú tardi abbandonato, molti filosofi d'oggi accetterebbero probabilmente *a*) e *b*).

In questa esposizione, 'termine' è stato usato per intendere 'termine singolare', cioè si è parlato di espressioni come 'Giulio Cesare', 'Everest', 'La stella della sera', che intendono designare un solo oggetto. Russell pensava anche che nomi generali come 'cavallo', 'oro' fossero sinonimi di altre espressioni, e precisamente di congiunzioni di clausole esprimenti le condizioni necessarie e sufficienti di appartenenza alla classe interessata. Per esempio, 'oro' era pensato come sinonimo di 'metallo giallo, prezioso, inalterabile, pesante, solubile in acqua ragia', o qualcosa del genere.

Cosí la teoria di Russell dice qualcosa su quali tipi di nomi esistono (primitivi e definiti) e come essi denotano, qualcosa sulla referenza, cioè che esiste una relazione fra termini e oggetti indipendenti dal discorso, e qualcosa sulla natura della verità e falsità (teoria della corrispondenza). Questi argomenti nel dibattito filosofico piú recente sono stati separati; si vedrà in seguito che sono ancora al centro di aspre discussioni.

2. *La «nuova teoria della referenza»; Putnam e Kripke.*

Hilary Putnam e Saul Kripke, l'uno indipendentemente dall'altro, hanno proposto in una serie di pubblicazioni un certo numero di idee simili e strettamente collegate fra loro, che convergono in un deciso attacco alle vedute «tradizionali» di Russell.

Le teorie di Putnam nascono dal suo lavoro sia nel campo della filosofia della mente, sia in quello della filosofia del linguaggio. In *Dreaming and "Depth of Grammar"* egli attaccava l'idea che un universale sia sinonimo di un insieme di condizioni sufficienti e necessarie per l'appartenenza alla classe. Egli scriveva, citando il caso della «sclerosi multipla»: «Ciò che vorremmo dire è: esiste (pensiamo che esista) qualcosa – diciamo un virus – che normalmente provoca questo e quest'altro sintomo. Forse occasionalmente (raramente) altri disturbi causano gli stessi sintomi in alcuni pazienti. Quando un paziente manifesta questi sintomi diciamo che ha una "sclerosi multipla" – ma, naturalmente, siamo pronti a riconoscere d'esserci sbagliati se il caso si rivela anomalo. E siamo pronti a classificare come casi di sclerosi multipla dei disturbi che presentino sintomi devianti, se scopriamo che *l'agente fondamentale* era il virus che provoca la sclerosi multipla, e che la devianza dei sintomi costituiva, diciamo, una variazione casuale. Da questo punto di vista la questione non è, per cosí dire, l'"estensione" del termine "sclerosi multipla", ma quale sia, se esiste, la cosa che ***risponde*** alla nostra nozione di sclerosi multipla. Quando sappiamo che cosa corrisponde (piú o meno perfettamente) ai nostri criteri, *questa*, sia quel che sia, sarà l'"estensione" di "sclerosi multipla"» [1962, ed. 1975 pp. 310-11].

In questo paragrafo appare una delle idee centrali di quella che è stata qui

definita «nuova teoria della referenza»: l'idea che l'estensione di certi tipi di termini (piú tardi Putnam parlerà di «parole di specie naturale», intendendo i nomi delle sostanze naturali, delle specie, e delle grandezze fisiche) non sia fissata da un insieme di «criteri» stabiliti a priori, ma sia, in parte, stabilita dal mondo. Esistono leggi oggettive cui la sclerosi multipla, i cavalli, l'oro, l'elettricità obbediscono; e che cosa sia razionale includere in queste classi dipende da che cosa queste leggi mostrano d'essere.

Poiché non si conoscono esattamente queste leggi, è necessario lasciare in qualche modo indeterminata l'estensione di queste classi, piuttosto che stabilirla esattamente considerando i termini sinonimi d'insiemi di condizioni necessarie e sufficienti. L'estensione di «sclerosi multipla» include tutto ciò che si rivela *della stessa natura* della maggioranza dei casi «paradigmatici» di sclerosi multipla; non si suppone di conoscere a priori che cosa questa natura sia (che cosa siano le leggi). In quest'ottica, paradigmi e programmi di ricerca per scoprire le leggi (o dimostrare la validità di quelle già in nostro possesso) prendono il posto delle rigide condizioni necessarie e sufficienti nel determinare l'estensione.

In *Identity and Necessity* [1971] e *Naming and Necessity* [1972] Saul Kripke ha attaccato l'analisi russelliana dei nomi propri. Secondo Kripke, non è il caso che 'Giulio Cesare' sia sinonimo di una qualche espressione del tipo «Il generale romano che si chiamava 'Giulio', che sconfisse Pompeo, che attraversò il Rubicone, ecc.».

Nell'articolo «Possibilità/necessità» di questa stessa *Enciclopedia* è stata descritta la teoria di Kripke della possibilità. Si ricorda qui che ha senso dire «Giulio Cesare avrebbe potuto non chiamarsi 'Giulio'» (i suoi genitori avrebbero potuto chiamarlo 'Marco'). Similmente, ha senso usare gli enunciati (che sono veri, sia secondo la teoria di Kripke sia secondo le nostre intuizioni preanalitiche) 'Cesare avrebbe potuto non sconfiggere Pompeo', 'Cesare avrebbe potuto non attraversare il Rubicone', ecc. Ma nessuno di questi enunciati sarebbe in grado di esprimere una possibilità se 'Giulio Cesare' *significasse* «L'unico individuo che fu un generale romano, ebbe nome 'Giulio', sconfisse Pompeo, attraversò il Rubicone, ecc.». In effetti, se 'Giulio Cesare' fosse sinonimo di questa descrizione, allora egli *non* sarebbe stato Giulio Cesare *se non* avesse sconfitto Pompeo. Il che è chiaramente falso.

L'analisi di Kripke (riassunta in «Possibilità/necessità») conclude che un individuo in un qualsiasi mondo possibile, che abbia gli stessi genitori del vero Giulio Cesare, e derivi dallo stesso ovulo fecondato, è un possibile Giulio Cesare anche se, nel mondo possibile in questione, ha una vita diversa da quella del vero Giulio Cesare, un altro nome, ecc. Questo spiega la possibilità di enunciati come «Giulio Cesare avrebbe potuto non chiamarsi 'Giulio'», ma lascia il problema di fornire un'interpretazione del significato del nome 'Giulio Cesare', dato che quella di Russell si è rivelata falsa.

La teoria di Kripke della possibilità identifica gli individui attraverso i mondi possibili sulla base delle origini e della storia. Questi stessi fattori – origine e storia – sono quelli che svolgono un ruolo decisivo nell'interpretazione kripkiana del funzionamento dei nomi.

Un nome viene originariamente dato ad una persona, «battezzandola» per cosí dire. In seguito la gente usa questo nome con l'intenzione di riferirsi a chiunque è stato precedentemente conosciuto con quel nome (o con una sua variante, visto che i nomi cambiano grafia e pronunzia nel corso del tempo) da determinate persone in determinati contesti. Posto che all'inizio abbia avuto luogo una «cerimonia di denominazione» riuscita, e che nell'uso successivo del nome esista la giusta forma di continuità, si può considerare il nome 'Mosè', quale esso è usato oggi, come riferentesi allo stesso individuo cui la versione originale del nome (che era all'incirca 'Moshe') venne attribuita nell'appropriata cerimonia di denominazione – cerimonia che sta all'altro capo della catena causale che conduce da ultimo al nostro uso attuale nelle circostanze in questione.

Questo non significa che 'Mosè' sia sinonimo della descrizione «la persona cui fu dato nome 'Moshe' nella cerimonia di denominazione che è connessa (dal giusto tipo di catena causale) al mio presente uso del nome 'Mosè'». Significa che noi usiamo, implicitamente, quella descrizione per indicare l'individuo che chiameremmo Mosè anche parlando di mondi possibili in cui egli non soddisfa la descrizione che usiamo per indicarlo nel mondo reale. In effetti, usiamo descrizioni per indicare a chi o a che cosa ci stiamo riferendo, ma ciò non vuol dire che i nomi che usiamo siano sinonimi di queste descrizioni, in quanto i nomi hanno proprietà logiche diverse (entrano in diversi condizionali controfattuali veri) da quelle delle descrizioni che impieghiamo per individuare i portatori dei nomi.

In *Is Semantics Possible?* (1970) e, in forma piú estesa, in *The Meaning of "Meaning"* (1975) Putnam ha effettuato alcune considerazioni sui termini di specie naturale, le quali hanno una certa correlazione con queste osservazioni sui nomi propri. Secondo Putnam, l'uso di una parola come 'oro' dipende dal nostro possedere paradigmi, esempi standard che sono riconosciuti come membri modello della specie. (Naturalmente alcuni di essi, sottoposti ad analisi, possono dimostrarsi di natura diversa dalla maggioranza; se ciò accade, questi non contano piú come paradigmi). Ciò che fa sí che qualcosa sia oro è il fatto che ha la stessa natura dei paradigmi; in armonia con la teoria fisica attuale, ciò significa avere la stessa composizione, poiché è la composizione atomica a determinare il comportamento di una sostanza.

Per fare un altro esempio, si consideri la specie «limone». Ci sono limoni verdi anziché gialli, e può benissimo esistere un agrume giallo che *non* sia un limone. Ciò che fa sí che qualcosa sia un limone è il suo avere la stessa natura (per esempio lo stesso DNA) dei limoni paradigmatici, e non il suo soddisfare un qualche insieme di condizioni (colore giallo, buccia spessa, gusto agro...) stabilite a priori. Le specie naturali non hanno definizioni analitiche.

L'aggancio con le idee di Kripke sui nomi propri è questo: in entrambe le teorie la referenza è fissata mediante cose date *esistenzialmente* e non attraverso criteri. Oggetti reali, qualunque sia la loro descrizione, che hanno avuto un certo ruolo causale nella nostra acquisizione e nel nostro uso dei termini, stabiliscono a che cosa i termini si riferiscono. Un termine si riferisce a qualcosa se sta nella relazione appropriata (continuità causale nel caso dei nomi propri; identità di «natura» nel caso dei termini di specie) con questi oggetti esistenzialmente dati. Nel caso dei nomi propri, l'oggetto dato esistenzialmente è la persona o cosa originariamente «battezzata» col nome; nel caso dei termini di specie naturale, gli oggetti esistenzialmente dati sono i paradigmi reali.

Una seconda relazione consiste nel fatto che il giusto tipo di continuità causale, e il condividere una natura, è determinato dalle nostre teorie, in evoluzione, sulla natura oggettiva delle persone e delle varie specie naturali, e non è a priori.

Come è già stato detto nell'articolo «Possibilità/necessità», Kripke sostiene l'idea che, una volta scoperto che l'acqua *reale* è H_2O, ci si rifiuta di chiamare 'acqua' delle possibili (ipotetiche) sostanze di composizione chimica differente, anche nel caso in cui assomiglino superficialmente all'acqua. Se si assume che sia la natura dell'acqua locale (terrestre) a determinare l'«essenza» dell'acqua (cioè a determinare che cosa è acqua in un qualunque «mondo possibile»), allora questo punto di vista coincide perfettamente con quello di Putnam. E l'osservazione fatta da Putnam, che i termini di specie naturale non possono essere definiti analiticamente, è fatta anche da Kripke, e per ragioni analoghe.

3. *La rilevanza filosofica della nuova teoria della referenza.*

Una parte della rilevanza della «nuova teoria della referenza» (il nome è dovuto a Schwartz [1977], il cui libro costituisce una delle migliori esposizioni di questo argomento) è già stata evidenziata; negando che i nomi propri e i termini di specie naturale siano sinonimi di descrizioni definite o congiunzioni di criteri, la nuova teoria rende possibile il tipo di teoria della necessità descritta nel già citato «Possibilità/necessità». Questa teoria riabilita la nozione che gli oggetti e le specie abbiano *essenze*, cioè che vi siano delle caratteristiche che una data cosa deve avere per essere la cosa (o il tipo di cosa) che è, liberando nel frattempo questa nozione dalle sue connessioni con un'epistemologia aprioristica.

Ma la nuova teoria ha importanza anche in una direzione completamente differente, come nota Wiggins [1980]. Le due idee chiave della nuova teoria sono:

1) per appartenere ad una specie naturale, un dato oggetto deve avere la stessa composizione, od obbedire alle stesse leggi – in effetti, ciò che rende la composizione importante, quando lo è, è il suo collegamento con leggi di comportamento – dei membri modello della classe, e questa composizione o queste leggi non sono solitamente note nel momento in cui il termine di specie naturale è introdotto, ma richiedono una quantità indefinita di ricerche per essere scoperte;
2) i termini di specie naturale e i nomi propri non sono sinonimi di congiunzioni di criteri e descrizioni definite, rispettivamente.

La teoria di Kripke sulla necessità assume, come si è visto, sia 1) sia 2). Ma 1) è già di per sé ricca di interesse filosofico.

Ciò che 1) dice è che sono le stesse specie naturali a svolgere un ruolo nel determinare l'estensione dei termini che ad esse si riferiscono. David Wiggins sot-

tolinea come questo significhi che c'è una grande differenza fra i termini di specie naturale, i quali richiedono l'ipotesi di una «natura», o di un insieme di leggi oggettive, siano leggi del comportamento, o leggi della «generazione e corruzione», o leggi dello sviluppo di un membro tipo di una specie biologica, e ciò che egli chiama «termini artefattuali». Sono «artefattuali» i termini come 'tavolo', o 'televisore'. Essi si riferiscono ad oggetti di cui si conosce completamente la natura, in quanto noi li abbiamo disegnati ed inventati. Secondo Wiggins, siamo in grado di fornire insiemi di condizioni necessarie e sufficienti per appartenere all'estensione di un termine di questo tipo. Wiggins nota anche che il tracciare una precisa distinzione in questo senso tra artefatti e membri di specie naturale porta ad una sorta di riabilitazione della nozione aristotelica di *sostanza*. (L'esempio di sostanza prediletto da Aristotele è un organismo vivente; egli sostiene che un artefatto, per esempo un'ascia, è una sostanza solo in senso lato). Wiggins inoltre applica questa distinzione alla filosofia morale: egli vede un'importante differenza tra posizioni che considerano il termine 'persona' come artefattuale (il che significa che *noi* determiniamo *convenzionalmente* le condizioni per essere una persona) e posizioni che invece lo trattano come un termine di specie naturale.

Il carattere evidenziato da Wiggins è chiamato da Putnam «contributo dell'ambiente». Secondo Putnam, «i significati non sono nella testa»; a stabilire la referenza concorre la natura reale dei paradigmi e non semplicemente i concetti nella nostra testa. Un'altra caratteristica importante, sia della teoria di Kripke, sia di quella di Putnam, è che la referenza è determinata *socialmente*. Per stabilire se qualcosa è realmente oro o meno, un parlante potrebbe dover consultare un esperto, che conosca la natura dell'oro meglio della media dei parlanti. La catena storica di trasmissioni che conservano la referenza di un nome proprio nella teoria di Kripke è un altro caso di cooperazione sociale nella determinazione d'una referenza. L'idea che le estensioni dei nostri termini siano stabilite da pratiche collettive, e non da concetti che ognuno di noi individualmente ha, rappresenta un netto distacco dal modo in cui il significato è stato inteso a partire dal XVII secolo.

4. *La teoria della verità di Tarski.*

Dalla referenza si passi ora a discutere della verità, prendendo le mosse dal lavoro di Alfred Tarski [1933], uno dei piú grandi logici moderni. Benché per presentare adeguatamente la teoria tarskiana sia necessaria una conoscenza piuttosto approfondita della logica, una delle idee guida, quella di *disquotation*, è facile da spiegare. Si prenda un qualsiasi enunciato, ad esempio *La neve è bianca*. Lo si ponga tra virgolette: «La neve è bianca»; e si aggiungano le parole «è vero»: '"La neve è bianca" è vero'. L'enunciato risultante è nel suo complesso vero se e solo se è vero quello originario. Inoltre esso è asseribile se e solo se l'enunciato originario è asseribile; ed è probabile al grado *r* se e solo se l'enunciato originario è probabile al grado *r*, ecc.

Secondo Tarski, Carnap, Quine, Ayer e altri, la conoscenza di questi fatti

è la chiave per capire le parole «è vero». In breve, per capire *P è vero*, dove *P* è un enunciato tra virgolette, togliere le virgolette (*disquote*) a *P* (ed eliminare «è vero»).

Per esempio, cosa significa '"La neve è bianca" è vero'? Significa 'La neve è bianca'. Cosa significa '"Esiste un mondo reale esterno" è vero'? Significa 'Esiste un mondo reale esterno'. E cosí via.

Ciò che i sostenitori della *disquotation* affermano è che la domanda *che cosa vuol dire* che qualcosa è vero non ha bisogno di impegnarsi su un'opinione sul significato del qualcosa in questione, o su come si possa verificare questo qualcosa. Si può interpretare materialisticamente 'La neve è bianca'; si può credere che 'La neve è bianca' sia verificabile, o che sia solo falsificabile ma non verificabile, o semplicemente confermabile a un grado di probabilità compreso tra 0 e 1; o niente di tutto ciò; ma 'La neve è bianca' rimane equiasseribile con '"La neve è bianca" è vero'. Da questo punto di vista «vero» è, sorprendentemente, una nozione filosoficamente neutra. «Vero» è semplicemente un accorgimento per consentire un'«ascesa semantica» – consentire di «innalzare» un'asserzione dal «linguaggio oggetto» al «metalinguaggio», e questo accorgimento non compromette chi lo usa né epistemologicamente né metafisicamente.

Si tratteggerà ora la seconda idea guida della teoria di Tarski. In questa teoria «vero» è un predicato di enunciati; e questi enunciati, se la teoria dev'essere precisa, devono appartenere a un qualche linguaggio formalizzato *L*. (È oggi al centro di molte discussioni tra filosofi e linguisti il modo in cui sia possibile estendere la teoria ai linguaggi naturali). Ora, un «linguaggio» inteso in questo senso ha un numero *finito* di predicati indefiniti o «primitivi». Per semplicità, si supponga che il linguaggio *L* abbia due soli predicati primitivi – 'È la Luna' e 'È azzurro'. Per qualunque predicato *P*, la locuzione

'*P* si riferisce a *x*'

di cui è possibile evidenziare l'intima connessione con la parola «vero» usando «è vero di» anziché «si riferisce a»:

'*P* è vero di *x*'

può essere spiegata anche con l'idea di *disquotation*: se *P* è il predicato 'È la Luna', si ha:

'"È la Luna" si riferisce a *x* se e solo se *x* è la Luna'.

E se *P* è il predicato 'È azzurro', si ha:

'"È azzurro" si riferisce a *x* se e solo se *x* è azzurro'.

Cosí la proposizione del metalinguaggio '"È la Luna" si riferisce a *x*' è equivalente all'affermazione del linguaggio oggetto '*x* è la Luna'.

Si dice che *P* si riferisce primitivamente a *x* se *P* è un predicato primitivo (nel caso del linguaggio *L* 'È la Luna' o 'È azzurro') e *P* si riferisce a *x*. Allora si può definire, per l'esempio specifico *L*, la referenza primitiva fornendo un elenco:

DEFINIZIONE. *P si riferisce primitivamente a x se e solo se 1) P è la locuzione 'È la Luna' e x è la Luna; oppure 2) P è la locuzione 'È azzurro' e x è azzurro.*

E per qualunque particolare linguaggio formalizzato può esser data un'analoga definizione della referenza primitiva quando si abbia un elenco dei predicati primitivi di quel linguaggio.

Una spiegazione appropriata del resto della teoria tarskiana richiederebbe conoscenze non indifferenti di logica e di matematica. Si sarà quindi *molto* approssimativi.

I predicati non primitivi di un linguaggio vengono derivati dai primitivi con vari mezzi – funzioni di verità e quantificatori. Si supponga, per fare un esempio, che i soli mezzi logici siano la disgiunzione e la negazione: la formazione dei predicati «P o Q» e «non-P» a partire dal predicato P. Si può allora definire la referenza nel modo seguente:

I) se P non contiene connettivi logici, *P si riferisce a x* se P si riferisce primitivamente a x;
II) *P o Q si riferiscono a x* se P si riferisce a x o Q si riferisce a x;
III) *non-P si riferisce a x* se P non si riferisce a x.

Il trasformare questa definizione induttiva in una esplicita è ciò che richiede una conoscenza approfondita delle tecniche della logica; basti qui dire che può esser fatto. Il risultato è una definizione di «referenza» *per un particolare linguaggio* – una definizione che non fa uso di parole semantiche (parole della stessa famiglia di 'vero' e 'riferisce').

La principale tecnica di cui Tarski si serve per porre definizioni induttive nella forma di definizioni esplicite è quella – escogitata da Frege (cfr. l'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*) – che consente di definire l'ancestrale F^* di una relazione F. Questa tecnica richiede la quantificazione su insiemi e relazioni arbitrarie sull'universo di discorso del linguaggio per il quale si vuole definire la «verità»; quindi la definizione esplicita di «vero in L» viene sempre data in un linguaggio che ha una teoria degli insiemi piú forte di L stesso.

Infine, supponendo che il nostro semplice linguaggio sia cosí semplice che tutti gli enunciati sono della forma *per ogni x, Px, per qualche x, Px*, o funzioni di verità di queste (dove P è un predicato), allora *vero* sarà definito come segue (ovviamente Tarski analizzò in realtà linguaggi molto piú complessi):

I') *per ogni x, Px* è *vero* se e solo se, per ogni x, P si riferisce a x;
II') *per qualche x, Px* è *vero* se e solo se, per qualche x, P si riferisce a x;
III') se p e q sono enunciati, *p o q* è *vero* se p è vero o q è vero; e *non-p* è vero se p non è vero.

Mantenendosi fuori dalla parte matematica del lavoro di Tarski (come si trasforma una «definizione induttiva», come quella descritta, in una «esplicita» della forma 'Qualcosa è vero se e solo se...', in cui «vero» e «si riferisce» non compaiono in «...») e ignorando le enormi complicazioni che sorgono quando il linguaggio comprenda relazioni – predicati a due (o tre, ecc.) posti – si è cercato di evidenziare tre idee:

1) «Verità» e «referenza» sono definite *per uno specifico linguaggio per volta.* Non viene definita la relazione «vero in L» con L variabile.
2) La referenza primitiva è definita «per mezzo di un elenco»; e la referenza e la verità in generale sono definite per induzione sul numero dei connettivi logici nel predicato o nella proposizione, a partire dalla referenza primitiva.
3) La definizione «induttiva» mediante una serie di regole come I), II), III), I'), II'), III'), può essere trasformata in una vera e propria «definizione esplicita» mediante l'uso di strumenti logici.

Come controprova della correttezza di quanto è stato fatto, è facile ricavare dalla definizione di «vero» il seguente

TEOREMA. *«Per qualche x, x è la Luna» è vero se e solo se, per qualche x, x è la Luna.*

E in effetti, si può ricavare dalla definizione di verità che

T) «P» è vero se e solo se P

dove la lettera «P» è sostituita da *qualunque* enunciato del linguaggio L.

Nel fatto che le cose debbano stare cosí – che lo schema T di cui sopra sia tale che tutti i suoi esempi sono conseguenze della definizione di «vero» – consiste il «criterio di adeguatezza» (il famoso «Criterio T») di Tarski per le definizioni di «è vero».

È da notare che, mentre l'idea di *disquotation* può dapprincipio apparire banale, la teoria di Tarski è ovviamente tutt'altro che banale. La ragione di ciò sta nel fatto che l'idea di *disquotation* dice soltanto che il Criterio T è corretto; ma non dice come definire «vero» in modo da soddisfare il Criterio T. Né la *disquotation* in sé consente di eliminare «vero» da tutti i contesti in cui occorre. '"La neve è bianca" è vero' è equivalente a *La neve è bianca*; ma a quale enunciato *non comprendente la parola 'vero'* (o qualsiasi altro termine «semantico») è equivalente il seguente: *Se le premesse in un'inferenza della forma p o q, non-p ∴ q, sono entrambe vere in L, allora la conclusione è anch'essa vera in L*? Il metodo di Tarski dà un equivalente per *questo* enunciato, e per altri in cui «è vero» compare con variabili e quantificatori, e questo è ciò che la *disquotation* di per sé non riesce a fare.

5. *Davidson su verità e significato.*

Dal punto di vista appena descritto, la comprensione della parola 'vero' non pone particolari problemi filosofici né d'altro genere. Nell'enunciato '"La neve è bianca" è vero', ad esempio, il significato della parola 'vero' è colto da una qualsiasi definizione di «vero in italiano» che soddisfi il Criterio T di Tarski; ovvero, che fornisca tutte le equivalenze della forma:

'"La neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca'.

« Certamente capisci "La neve è bianca" », sono pronti ad argomentare i filosofi che seguono Tarski (in caso contrario, non sono solo le parole « semantiche » come 'vero' o 'riferisce' a costituire il tuo problema), « e se tu sai che 'La neve è bianca è vero' è equivalente a 'La neve è bianca', allora sai tutto ciò che serve sapere per capire 'La neve è bianca è vero' ».

Quali che possano essere i meriti di un ragionamento simile come risposta ai problemi filosofici suscitati dal concetto di verità, è chiaro che l'idea consiste nel considerare i termini non semantici (i termini descrittivi del linguaggio oggetto e il vocabolario logico) come *compresi*, e nell'usare questi termini non semantici (ed una base teoretica piú forte di quanto consentito dal linguaggio oggetto) per spiegare il significato di 'vero'. Donald Davidson, in un'importante serie di contributi [cfr. ad esempio 1967] ha proposto un interessante capovolgimento di questa procedura.

Si supponga di formalizzare l'italiano (o una parte adeguata dell'italiano), e di dare una definizione alla maniera di Tarski della verità per il linguaggio risultante. Questo fornirà come teoremi una serie di enunciati della forma:

'« *P* » è vero se e solo se *P*'

per esempio, ancora una volta

a) '"La neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca'.

Questa definizione di verità non deve necessariamente essere data in italiano (in una versione insiemisticamente rafforzata dell'italiano); può essere data, per esempio, in tedesco (con una appropriata teoria degli insiemi). In questo caso la definizione di verità darà tutti gli enunciati della forma:

« P » ist wahr wenn und nur wenn P'

dove *P'* è la traduzione in tedesco dell'enunciato italiano *P*, ad esempio:

b) *'La neve è bianca' ist wahr wenn und nur wenn Schnee ist weiss.*

Si immagini ora un parlante tedesco che non conosca affatto l'italiano, e al quale venga detto *b*). Se comprende la nozione di verità (cioè, se sa cosa significa *wahr*), ciò che *b*) gli dirà è il *significato* dell'enunciato 'La neve è bianca' in italiano. Se gli fosse data la definizione di verità per l'italiano, egli ne potrebbe derivare un enunciato della forma *« P » ist wahr wenn und nur wenn P'* (un *T*-enunciato) in corrispondenza di ciascun enunciato *P* dell'italiano, e dedurre in questo modo che cosa significano tutti gli enunciati dell'italiano. (Questo non vuol dire che si debba dare al parlante tedesco l'elenco infinito di tutti i *T*-enunciati; ciò che gli viene dato è la *definizione* di verità, la quale è una definizione esplicita finita).

In breve, l'idea di Davidson è di capovolgere l'argomentazione di Tarski. Anziché considerare come « vero » il termine di cui si deve spiegare il significato, e il linguaggio oggetto come noto, Davidson assume il linguaggio oggetto come ciò che dev'essere spiegato, e 'vero' (o qual altro sia il termine che significa vero nel linguaggio in cui si deve fornire la spiegazione) come ciò che è già conosciuto.

In questo modo, qualunque definizione di verità per un linguaggio (nel senso tarskiano) può essere vista come una teoria del significato per quel linguaggio.

Davidson va oltre, e sostiene l'inverso; che qualunque teoria del significato per un linguaggio, cioè qualunque descrizione finita che stabilisce significati per l'infinita moltitudine degli enunciati di un linguaggio, è implicitamente una definizione della verità in quel linguaggio, e che la forma esplicita proposta da Tarski è quella ideale per teorie formalizzate del significato. Non verranno qui discusse queste affermazioni, benché costituiscano un'affascinante conseguenza delle discussioni sulla verità tra i logici e i filosofi.

Il punto che qui interessa è questo: qual è la portata di una simile teoria del significato, o di una simile concezione del rapporto fra teoria della verità e teoria del significato, per la natura della comprensione?

Davidson risponde senza esitazioni: se la teoria del significato di un linguaggio è semplicemente la definizione di verità per il linguaggio stesso, allora, egli argomenta, la comprensione che un nativo ha del proprio linguaggio può venire perfettamente descritta come una conoscenza implicita di quella definizione di verità. Comprendere un linguaggio naturale (o, peraltro, formalizzato) significa implicitamente conoscere la definizione ricorsiva di verità per quel linguaggio, in quanto è questa ricorsività che stabilisce le condizioni di verità di uno qualunque tra gli infinitamente numerosi enunciati del linguaggio.

Potrebbe a questo punto sembrare che non si sia detto niente di diverso da ciò che affermava la teoria della verità come corrispondenza. La definizione di verità per l'italiano dice a Karl che 'La neve è bianca' è vero se e solo se la neve è bianca (questo benché Karl pensi questo pensiero in tedesco e non in italiano, pensi cioè l'enunciato poc'anzi chiamato *b*)); cosí Karl può rispondere alla domanda di quale stato di cose corrisponda all'enunciato italiano 'La neve è bianca', replicando « che la neve è bianca » (o, in tedesco, « dass Schnee weiss ist »). Sembra in effetti che ogni enunciato in italiano corrisponda ad uno stato di cose che deve darsi se l'enunciato in italiano deve essere vero (e la definizione di verità dice di quale stato di cose si tratti). E il *capire* la proposizione in italiano sembra effettivamente consistere (se Davidson è nel giusto) nell'afferrare le condizioni per la verità dell'enunciato, o meglio, nell'afferrare la definizione che genera un *T*-enunciato, il quale specifica queste condizioni. Che Tarski e Davidson fra tutti e due abbiano finito per giustificare e chiarire la teoria della verità come corrispondenza?

6. *La teoria non realistica della verità di Michael Dummett.*

A questa domanda, Michael Dummett [1979] risponde con un sonoro no (una versione piú approfondita delle idee di Dummett si avrà quando saranno pubblicate le sue William James Lectures, 1976). Dummett sostiene che il nocciolo della teoria della verità come corrispondenza è l'idea che il mondo consista di fatti e di oggetti indipendenti dalla mente (o, se si preferisce, dal linguaggio). Un enunciato può essere vero, in quest'ottica, solo se un fatto di questo tipo lo

rende vero; e la nostra comprensione di un enunciato consiste nell'afferrare quale sia lo stato di cose indipendente dalla mente che a questo enunciato corrisponde. Né la teoria tarskiana della verità (che è dal punto di vista filosofico assolutamente neutra) né quella di Davidson su che cosa è una teoria del significato verificano o falsificano questi assunti metafisici. (Questo benché generi qualche confusione il fatto che Tarski abbia sostenuto sia che il proprio lavoro rappresenta una ricostruzione della teoria della verità come corrispondenza, sia che esso è filosoficamente neutro).

Quanto all'affermazione di Davidson che capire un linguaggio significa conoscerne la teoria della verità, Dummett risponde che ci si deve domandare in che cosa questa «conoscenza della teoria della verità» consista.

Una possibile replica (che non è quella di Davidson) potrebbe darsi che consista in questo: la mente pensa, consciamente o inconsciamente, gli enunciati (o giudizi, o proposizioni, a seconda di quale terminologia filosofica tradizionale si voglia adottare) che costituiscono quella teoria della verità. Ma ci si deve a questo punto domandare: *come* la mente pensa questi enunciati? Li pensa in parole o almeno in segni (rappresentazioni) mentali di qualche tipo? O si ritiene che la mente colga che cosa vuol dire che la neve è bianca (per esempio) senza l'aiuto di alcun tipo di rappresentazione mentale?

Se si sceglie la prima alternativa (come farà qualunque filosofo di formazione naturalistica o psicologo cognitivo), allora si pone il problema: in che cosa consiste la comprensione che la mente ha delle proprie rappresentazioni mentali, dei propri «mezzi di rappresentazione»? È inutile rispondere «nella sua conoscenza delle condizioni di verità per le rappresentazioni mentali», perché questo porterebbe immediatamente o ad un regresso all'infinito, o all'ammissione che un qualche tipo di segni dev'essere compreso in un modo che la teoria della verità come corrispondenza non spiega.

D'altro canto, la seconda alternativa non è null'altro che il mito della possibilità di confrontare direttamente un segno (per esempio l'enunciato 'La neve è bianca', o qualche rappresentazione mentale che stia dietro questo segno) con una realtà non concettualizzata. L'idea che «afferrare le condizioni di verità» (ad esempio, afferrare che cos'è l'esser bianco della neve) sia precedente al comprendere i segni corrispondenti (comprendere l'enunciato 'La neve è bianca' o qualche rappresentazione dallo stesso significato) è assurda.

Lo stesso Davidson evita questa posizione insostenibile. Nella sua analisi, la nostra comprensione delle condizioni di verità per il nostro linguaggio è conoscenza implicita, e non già conoscenza esplicita, o conoscenza proposizionale di alcun tipo, e consiste nel nostro usare il linguaggio in modo tale che le condizioni di verità stabilite dai *T*-enunciati che derivano dalla teoria del significato siano buone *traduzioni* di questi enunciati (considerando le restrizioni operative e di semplicità poste da una teoria della traduzione). Ma questo rende tautologico (e Davidson ne è consapevole) il fatto che se si comprende l'enunciato 'La neve è bianca' come enunciato in italiano, allora «si sa implicitamente» che la condizione di verità per questo enunciato è che la neve sia bianca (*dass Schnee weiss ist*).

In altre parole, ciò che nel nostro uso dell'enunciato italiano 'La neve è bianca' rende corretto tradurlo con altri come «Schnee ist weiss» in tedesco, «La neige est blanche» in francese, ecc., costituisce la conoscenza implicita del fatto espresso dal *T*-enunciato *a*) (o da una qualunque delle sue traduzioni corrette in un altro linguaggio, ad esempio *b*) in tedesco). Questo dimostra che è il nostro uso dell'enunciato 'La neve è bianca' che costituisce la «conoscenza implicita» della condizione di verità; ma non si fornisce alcuna teoria di questo uso.

In breve, l'idea di Dummett è che la «verità» nel senso di «corrispondenza a uno stato di cose sussistente» non può svolgere alcun ruolo esplicativo in un'analisi della comprensione. Si può mantenere la formula verbale «Se si capisce una proposizione se ne capiscono le condizioni di verità» trasformandola, come fa Davidson, in una tautologia; ma a questo punto *certamente* non ha una funzione esplicativa.

Dummett sottolinea che il principio secondo cui affermare la verità di un enunciato equivale ad affermare l'enunciato stesso (principio che egli chiama di equivalenza) era già stato formulato da Frege. Ciò che Tarski ha fatto consiste nell'aver dato un metodo per costruire definizioni di «vero in *L*» dove *L* è un linguaggio adeguatamente formalizzato che obbedisce al principio di equivalenza. Questo è un lavoro puramente formale: come tale, è corretto sia che si interpreti la verità alla maniera di un matematico intuizionista come Brouwer (cfr. l'articolo «Logica», § 13), o alla maniera di un seguace della cosiddetta teoria della verità come coerenza, o alla maniera d'un realista, o in qualsiasi altra. Il lavoro di Tarski *è* filosoficamente neutro; e in quanto tale non può sostenere la teoria della verità come corrispondenza.

L'idea di Dummett è che occorrano *due* nozioni di verità in filosofia del linguaggio. Se si utilizza un mezzo di comunicazione *L*, è possibile estendere questo mezzo a un cosiddetto metalinguaggio *ML* che contiene sia *L* sia un predicato di verità per *L*, secondo le istruzioni fornite da Tarski. Sarà una caratteristica di *ML* che (per cause puramente logiche) *«P» è vero* sia equivalente a *P*, posto che *P* sia una qualsiasi proposizione di *L*. Se 'La neve è bianca' è un enunciato di *L*, allora, in questo senso di «vero», sarà un fatto di logica che quest'enunciato sia equivalente a '"La neve è bianca" è vero'. Questo senso (tarskiano) di «vero» è chiamato da Dummett (nelle William James Lectures) «senso interno di "vero"». Il comprendere questo senso interno fornisce soltanto le equivalenze chiamate *T*-enunciati; non dice né come è compreso 'La neve è bianca' né come è compreso '"La neve è bianca" è vero', né a quali condizioni sia corretto asserirli.

Per rispondere all'elementare argomentazione tarskiana precedentemente descritta, il problema non è tanto non comprendere 'La neve è bianca'; è piuttosto non comprendere *che cosa significhi comprendere* 'La neve è bianca'. *Questo* è il problema filosofico.

Ma, sostiene Dummett, esiste un senso di «corretto» per il quale comprendere una proposizione *è* sapere quando questa proposizione viene correttamente asserita. Se questo senso viene visto come una corrispondenza con stati di cose indipendenti dalla mente, come nella teoria della verità come corrispondenza, allora, come si è visto, si cade o in un regresso all'infinito, oppure nel mito della possibilità di collegare direttamente i segni con una realtà non concettualizzata.

Dummett ritiene invece che la verità (o «correttezza»), in questo senso, sia semplicemente la nozione epistemica di giustificazione. «Un enunciato è vero se la sua asserzione è giustificata»: questo è ciò che Dummett chiama nozione *esterna* di verità. È un'interpretazione non realista (in questo senso di 'verità' gli enunciati non vengono «resi veri» da stati di cose indipendenti dalla mente, ma da stati di cose in quanto percepiti e concettualizzati; ed è in *questo* senso di 'vero' che conoscere il significato di una proposizione consiste nel sapere sotto quali condizioni questa sia vera).

Ma, per ripetere la domanda che Dummett poneva a Davidson, in che cosa consiste questo sapere? Secondo Dummett esso consiste nella reale capacità comportamentale di riconoscere quando queste condizioni di giustificazione vengono soddisfatte. Dal momento che le condizioni di giustificazione sono presenti alla mente (contrariamente alle condizioni di verità intese in senso realista, che sono nella maggior parte dei casi esterne alla mente) non v'è in linea di principio alcun problema riguardo a come la mente possa avere una capacità di questo tipo. Ed è un tipo di capacità tale che la mente può (in linea di principio) «afferrare» (posto che le condizioni di giustificazione siano assegnate agli enunciati per mezzo d'una qualche definizione ricorsiva). Dummett dichiara che la sua teoria non realistica della verità rende *sia* comportamentalmente rilevanti *sia* afferrabili le condizioni di verità.

La verità in senso esterno non sottostà a tutte le leggi della logica classica, però. Questo perché non sempre le condizioni sono tali da giustificare un'asserzione o la sua negazione. E cosí Dummett è pronto a rinunziare al classico principio del terzo escluso e ad accettare qualcosa di molto simile alla logica intuizionistica di Brouwer.

7. *«Realismo interno».*

In *Realism and Reason* (1976) e, successivamente, in *Models and Reality* (1977) Putnam ha proposto una concezione strettamente collegata alle idee di Dummett, pur distaccandosi da queste in alcuni punti. Laddove Dummett identifica la verità con la giustificazione, Putnam tratta la prima come un'idealizzazione della seconda. La verità non può *essere* semplicemente la giustificazione, argomenta Putnam [1979], per un gran numero di ragioni: si suppone che la verità sia una proprietà di un'asserzione che non può venir persa, mentre la giustificazione si può perdere (in effetti, la giustificazione è valida in un certo tempo e relativa ad un individuo); la giustificazione può avere dei gradi, mentre la verità no (o non nello steso modo); ecc. Un'asserzione, secondo Putnam, è vera se viene giustificata in condizioni epistemiche ideali. Le «condizioni epistemiche ideali» sono qualcosa come i «piani senza attrito» in fisica; in realtà non è possibile raggiungere condizioni epistemiche ideali per molti tipi di asserzioni, e se anche fosse possibile, non ci si potrebbe sentire al sicuro dalla possibilità di dover un giorno cambiare opinione circa il fatto di averle raggiunte; ma anche i piani senza attrito non possono essere ottenuti; eppure parlare di piani senza attrito ha un «valore» in quanto ci si può avvicinare ad essi con un altissimo grado di approssimazione. Similmente, è possibile approssimare con un alto grado, e con un ottimo livello di sicurezza, condizioni epistemicamente ideali per molti tipi di enunciati, e ciò dà «valore» alla discussione di ciò che sarebbe giustificato in condizioni epistemiche ideali. Abbandonando la metafora dei piani senza attrito, le due tesi piú importanti d'una teoria della verità come idealizzazione sono: 1) la verità è indipendente dalla giustificazione qui ed ora, ma non indipendente da *tutte* le possibilità di giustificazione. Affermare che un'asserzione è vera significa affermare che potrebbe essere giustificata; 2) ci si aspetta che la verità sia stabile, o «convergente»; se un'asserzione o la sua negazione fossero giustificabili anche in condizioni tanto ideali quanto si può sperare di ottenere, non avrebbe senso pensare all'asserzione come *avente* un valore di verità.

Alcuni realisti tradizionalisti hanno obiettato che la verità trascende anche la giustificabilità idealizzata (perché potremmo «in realtà» essere tutti ingannati da un demone malvagio, potremmo in realtà essere cervelli in un tino, ecc.). In *Realism and Reason* e in *Models and Reality* Putnam replica a queste osservazioni sottolineando che una teoria epistemicamente ideale dovrebbe necessariamente avere dei modelli (ad esempio, per via del teorema di Skolem-Löwenheim – cfr. il già citato articolo «Logica»), e, in effetti, modelli che soddisfino tutte le restrizioni teoriche ed operative (e siano quindi modelli «intesi»). Egli conclude che il realismo metafisico – e cioè l'idea che la verità trascenda anche la giustificazione idealizzata – è incoerente. D'altro canto, identificare la verità con la giustificazione (contingente) in quanto opposta alla giustificazione idealizzata significa abbandonare il principio che alcune delle asserzioni che sono *oggi* giustificate potrebbero in futuro dimostrarsi non *vere*; ed egli considera questo principio come un punto centrale della nostra visione empirica del mondo [cfr. Putnam 1979 e, *ibid.*, il commento al saggio di Dummett]. In questo modo Putnam recupera la distinzione kantiana tra realismo empirico e metafisico, e rifiuta il secondo, affermando il primo (realismo «interno»).

Putnam concorda con Dummett nel rifiutare la teoria della verità come corrispondenza. Ma non concorda con l'idea di Dummett che le condizioni di giustificazione degli enunciati siano fissate una volta per tutte da una definizione ricorsiva. (Da questo punto di vista la teoria di Dummett è come quella di Davidson: le condizioni di verità – quantunque nel senso «non realista» di «verità» – sono associate agli enunciati da una definizione che implica un'induzione sulla complessità di queste, e che viene assunta sia come teoria del significato, sia come teoria della verità, per il linguaggio). Per Putnam, come per Quine (cfr. «Possibilità/necessità»), le condizioni di giustificazione degli enunciati cambiano col cambiare del corpo totale delle nostre conoscenze, e non le si può considerare stabilite una volta per tutte. Non solo potremmo scoprire che enunciati che noi consideriamo oggi come giustificati sono falsi, ma potremmo addirittura scoprire che procedure che noi consideriamo giustificative non lo sono, e che ve ne sono di piú adeguate. Esattamente come nella «nuova teoria della referenza» qualcosa che supera l'attuale esame di ammissione per essere oro potrebbe rivelare di non essere oro (e le attuali prove potrebbero dimostrarsi inadeguate, in

quanto presupponenti una teoria sbagliata), cosí un'asserzione correntemente «giustificata» potrebbe risultare non vera, *e* l'analisi che ci ha condotti a pensare che lo fosse si potrebbe rivelare inadeguata. Esattamente come la natura oggettiva dell'ambiente contribuisce a stabilire la referenza dei termini, cosí essa contribuisce anche a fissare le condizioni oggettive di verità di un enunciato – anche se non in modo metafisico realista.

8. *Conclusione.*

Di fronte al riapparire di teorie non realistiche, molti realisti hanno iniziato a replicare. È chiaro che ciascuno dei problemi discussi da Russell – il carattere logico dei nomi propri e degli universali, la natura della referenza, la natura della verità – è un problema perenne. Questo secolo è stato particolarmente fertile di intuizioni e teorie su questi problemi. I problemi forse non avranno mai «risposte definitive», ma la discussione raggiunge livelli sempre piú profondi e raffinati. [H. P.].

Davidson, D.

1967 *Truth and meaning*, in «Synthese», XVII, pp. 304-23 (trad. it. in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Bompiani, Milano 1973, pp. 433-54).

Dummett, M.

1979 *What Does the Appeal to Use Do for the Theory of Meaning?*, in A. Margalit (a cura di), *Meaning and Use*, Reidel, Dordrecht.

Kripke, S.

1971 *Identity and Necessity*, in M. K. Munitz (a cura di), *Identity and Individuation*, New York University Press, New York (trad. it. in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Bompiani, Milano 1973, pp. 259-94).

1972 *Naming and Necessity*, in D. Davidson e G. Harman (a cura di), *Semantics of Natural Language*, Reidel, Dordrecht.

Putnam, H.

1962 *Dreaming and "Depth of Grammar"*, in R. J. Butler (a cura di), *Analytic Philosophy*, Blackwell, Oxford; ora in *Philosophical Papers*, II. *Mind, Language, and Reality*, Cambridge University Press, London 1975.

1979 *Reference and Understanding*, in A. Margalit (a cura di), *Meaning and Use*, Reidel, Dordrecht.

Schwartz, S. P.

1977 (a cura di) *Naming, Necessity and Natural Kinds*, Cornell University Press, Ithaca N.Y.

Tarski, A.

1933 *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, in «Acta Towarzystwej Naukowego i Literackiego Warszawskiego», fasc. 34; trad. ted. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, in «Studia Philosophica», I (1935), pp. 261-405 (trad. it. in F. Rivetti Barbò, *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo. Da Peirce a Tarski*, Vita e Pensiero, Milano 1961, pp. 391-677).

Wiggins, D.

1980 *Substance and Sameness*, Blackwell, Oxford.

Il problema dei rapporti tra il **linguaggio**, naturale o formale (cfr. **formalizzazione, naturale/artificiale**), e la realtà (cfr. **dato, evento, reale**), tra le parole (cfr. **linguaggio, parola**) e gli oggetti (cfr. **oggetto**), tra le proposizioni (cfr. **proposizione e giudizio**) e i fatti (cfr. **esistenza, essere**), è di grande importanza tanto per la filosofia (cfr. **filosofia/filosofie, rappresentazione, soggetto/oggetto**) quanto per la **logica** (cfr. **equivalenza, ricorsività**), e in particolare per la **semantica** (cfr. **senso/significato**). È proprio un determinato tipo di questi rapporti a venir destinato come referenza (cfr. **referente**), quando si tratta di parole e di oggetti, e come verità (cfr. **verificabilità/falsificabilità, vero/falso**) quando si tratta di proposizioni e di fatti.

Ricorsività

1. *La teoria della ricorsività.*

Gli studi che verranno tratteggiati in questo paragrafo presero avvio a Princeton nel 1934. In quel momento, Gödel stava tenendo una serie di conferenze cui erano presenti Church, Kleene e Rosser. In queste conferenze [Gödel 1934] egli si soffermava su una definizione di ricorsività proposta da Herbrand e ne suggeriva un'interpretazione che avrebbe portato all'odierno concetto di ricorsività generale. Nello stesso periodo Church stava lavorando alla sua nozione di λ-definibilità, nozione che si sarebbe dimostrata equivalente a quella di ricorsività generale. Ma per rendere comprensibili questi sviluppi, è necessario tornare indietro, e dire qualcosa sul contenuto dei celebri teoremi d'incompletezza di Gödel, e sulle nozioni utilizzate nella loro dimostrazione.

Ripercorrendo la storia di questi studi, si trova dapprima un prolungato e forse fuorviante tentativo di precisare una nozione piuttosto esoterica e tecnica, quella di ricorsività; e quindi la scoperta che parecchie nozioni differenti erano coestensive con quest'ultima e tra loro; e infine l'identificazione di tutte queste nozioni con quella di computabilità; identificazione che avrebbe condotto a risultati matematici di nuovo genere, risultati che enunciano non semplicemente l'irresolubilità di certi problemi impiegando determinati mezzi, ma l'irresolubilità di certi problemi (tra cui alcuni famosissimi problemi matematici) impiegando un qualsiasi mezzo effettivo (cfr. anche l'articolo «Calcolo» in questa stessa *Enciclopedia*, II, pp. 479-85).

L'irresolubilità di certi problemi matematici relativamente a determinati mezzi ristretti non costituiva una novità. 'Omar Khayyām supponeva che un'equazione algebrica generale di terzo grado non fosse risolubile per radicali. La sua congettura si dimostrò inesatta, ma in sé l'idea di una simile impossibilità – irresolubilità di una equazione algebrica per radicali – era assai brillante; e in ogni caso, 'Omar non aveva poi sbagliato di molto: in seguito, usando la teoria dei gruppi, Galois dimostrò che un'equazione algebrica generale di quinto grado non è risolubile per radicali. Galois dimostrò anche l'irresolubilità di alcuni altri tradizionali problemi matematici relativamente a determinati mezzi: per esempio, l'impossibilità di trisecare un angolo usando solo un compasso e una riga non graduata. Ma se un problema non è risolubile per mezzo di un compasso e di una riga non graduata, si può sempre dire «Molto bene, usiamo un compasso e una riga *graduata*». O, di nuovo, se un'equazione algebrica non è risolubile usando i radicali, si può dire «Molto bene, usiamo allora il metodo di Newton». Ma se un problema non è risolubile con alcun mezzo *effettivo*, allora non è possibile specificare un qualche altro mezzo da impiegare per risolverlo, per il semplice motivo che i mezzi effettivi sono gli unici che gli esseri umani siano in grado di usare per risolvere un problema. Per dirla in un altro modo, ogniqualvolta si ha un problema, nel senso particolare in cui viene usato qui il termine 'problema', vale a

dire, una classe potenzialmente infinita di domande cui deve poter essere data risposta corretta grazie a un metodo uniforme, la nostra attenzione si concentra sempre sull'esistenza o meno di un metodo *ricorsivo* per computare la corretta risposta a una qualunque domanda appartenente alla classe, perché sembra, oggettivamente, che i metodi ricorsivi siano gli unici metodi uniformi che gli esseri umani sono in grado di utilizzare. È per questa ragione che la scoperta che la teoria della ricorsività non è né piú né meno che la teoria della computabilità effettiva dà all'intero argomento la massima importanza.

Esistono, tuttavia, altre due ragioni per essere interessati alla teoria della ricorsività. Una è che la teoria, a prescindere da qualsiasi interesse extramatematico che possa rivestire, come quello dovuto alla sua connessione con la calcolabilità effettiva, dimostra di essere una teoria matematica affascinante da parecchi punti di vista. È estremamente autosufficiente; ed esiste un gran numero di potenti teoremi che possono essere dimostrati per tutte le funzioni e gli insiemi ricorsivi di interi, e che non valgono per funzioni e teoremi non ricorsivi.

Infine, un'altra ragione per la quale la teoria della ricorsività si è dimostrata interessante per molti logici e matematici è che sembra esistere un'impressionante e forse inaspettata connessione tra l'esistenza di problemi non risolubili con l'impiego di mezzi effettivi e l'esistenza di proposizioni indecidibili – proposizioni che non possono essere né dimostrate né refutate – nei sistemi formali. Quest'ultima connessione è estremamente profonda, ed esiste un gran numero di proprietà di sistemi formali che possono essere stabilite rapidamente per mezzo della teoria della ricorsività e che sarebbero molto lunghe da dimostrare impiegando qualsiasi argomento diretto di teoria della dimostrazione.

2. *Il teorema d'incompletezza di Gödel.*

In questo paragrafo si assumerà che il lettore abbia familiarità con i simboli ( ), (∃), ∧, ∨, ⊃, –, = già impiegati negli articoli «Logica» e «Formalizzazione» di questa stessa *Enciclopedia*. Sistemi formali differenti possono fare uso degli stessi simboli; ad esempio, molti sistemi sono stati costruiti facendo uso di questi simboli, o di loro varianti: N (per la proprietà di essere un numero intero non negativo), 1, 0, +, · (per la moltiplicazione). Le proposizioni relative a numeri interi non negativi che possono essere espresse per mezzo di questi simboli e di quelli consueti della logica del prim'ordine sono note come proposizioni della teoria elementare dei numeri. Ovviamente molti enunciati di ciò che vien normalmente chiamata teoria elementare dei numeri non possono essere espressi con questo vocabolario se non si sono precedentemente introdotte adeguate definizioni. Per esempio, è utile introdurre le nozioni di $x>y$, x divide y, x è una potenza di 2.

Come esempio del funzionamento di questa notazione, si scriverà l'enunciato che un cubo perfetto non è mai la somma di due cubi perfetti, a meno che uno almeno dei numeri dati sia uguale a zero: $(x)(y)(z)\ (((x\cdot x)\cdot x)=(((y\cdot y)\cdot y)+((z\cdot z)\cdot z))\supset((x=0)\vee(y=0)\vee(z=0)))$.

Un sistema molto debole nella teoria elementare dei numeri è quello, che si chiamerà Q, basato sui seguenti assiomi:

(A1) $(x)(y)\ ((N(x)\wedge N(y))\supset(x+1=y+1\supset x=y))$
(A2) $(x)\ (N(x)\supset 0\neq x+1)$
(A3) $(x)\ (N(x)\wedge x\neq 0\supset(\exists y)(N(y)\wedge x=y+1))$
(A4) $(x)\ (N(x)\supset x+0=x)$
(A5) $(x)(y)\ (N(x)\wedge N(y)\supset x+(y+1)=(x+y)+1)$
(A6) $(x)\ (N(x)\supset x\cdot 0=0)$
(A7) $(x)(y)\ (N(x)\wedge N(y)\supset x\cdot(y+1)=(x\cdot y+x))$.

Questo sistema è troppo debole per derivarne molte, anche tra le piú semplici, verità della teoria elementare dei numeri. Questa debolezza trae origine dal fatto di non aver incluso nelle regole d'inferenza né negli assiomi uno dei piú importanti metodi della teoria elementare dei numeri, il principio d'induzione matematica. Malgrado la debolezza del sistema Q, esistono alcuni enunciati molto forti che possono essere dimostrati non solo riguardo a Q, ma riguardo a tutte le sue estensioni: vale a dire, tutti i sistemi in cui gli enunciati da A1 ad A7 possono essere derivati come teoremi. Non interessano qui le proprietà che il sistema Q ha *soltanto* in virtú della propria debolezza, proprietà che perderebbe se si aggiungessero altri assiomi. Per contro, si è molto interessati a quelle proprietà che non possono essere *rimosse* dal sistema Q dall'aggiunta di ulteriori assiomi; e questo perché tali proprietà caratterizzeranno tutti i sistemi costruiti allo scopo di rappresentare adeguate formalizzazioni della teoria elementare dei numeri, e, a fortiori, di tutti i sistemi formali che siano ritenuti adeguate codificazioni dell'intero corpo della matematica.

Va precisato che per quanto Gödel non abbia originariamente enunciato i propri teoremi esattamente per la classe di sistemi in cui le proposizioni da A1 ad A7 sono teoremi, sarà conveniente riformularli in riferimento a questa classe. Di una proposizione S si dice che è una proposizione indecidibile in un sistema formale se in quel sistema non è dimostrabile né refutabile. In altre parole, S, $-S$ sono proposizioni indecidibili in un sistema formale FS se nessuna delle due è un teorema di FS. Si può notare che il concetto di «proposizione indecidibile» è simmetrico; vale a dire, una proposizione è indecidibile se e solo se lo è la sua negazione. Come prima approssimazione all'enunciazione del teorema di Gödel, si dirà:

Se FS è un qualunque sistema formale «soddisfacente», forte almeno quanto il sistema Q, vale a dire un qualunque sistema formale «soddisfacente» in cui sia possibile definire le nozioni primitive del sistema Q in modo tale che gli assiomi da A1 *ad* A7 *del sistema Q possano essere derivati come teoremi, allora FS contiene delle proposizioni indecidibili.*

Ciò che fa sí che questa non sia una formulazione precisa del teorema di Gödel è, ovviamente, l'uso della nozione imprecisa e non chiarita di sistema formale

«soddisfacente». Rendendo precisa in modi differenti questa nozione, si ottengono differenti versioni del teorema di Gödel, dovute rispettivamente a Tarski [1933], Rosser [1936], e ovviamente allo stesso Gödel [1931]. Forse il modo intuitivamente piú semplice di precisare la nozione di sistema formale «soddisfacente» consiste nel rivolgere l'attenzione ai sistemi formali *corretti*: vale a dire sistemi formali in cui tutti gli enunciati dimostrabili sono *veri*. Sfortunatamente, la nozione di «verità», a sua volta, è parsa a molti imprecisa. Se però ci si limita a considerare la nozione di «enunciato vero della teoria dei numeri», allora, come ha mostrato Tarski, questa può essere resa precisa usando soltanto concetti matematici accettati, in particolare usando certe nozioni della teoria degli insiemi (si veda l'articolo «Referenza/verità» in questa stessa *Enciclopedia*). Si enuncerà comunque ora, come prima versione del teorema di Gödel, quella proposta da Tarski [1933].

3. *La versione di Tarski del teorema di Gödel.*

Se FS è un qualsiasi sistema formale corretto in cui è possibile definire le nozioni primitive di Q in modo tale che gli assiomi da A1 *ad* A7 *possano essere derivati come teoremi, allora FS contiene proposizioni indecidibili.*

Siccome per rendere precisa la nozione di sistema formale «corretto» anche solo nella teoria dei numeri sono necessari poderosi strumenti insiemistici, è naturale cercare delle versioni del teorema di Gödel che non necessitino delle nozioni di «verità» e di «correttezza». In effetti, il teorema originale di Gödel non faceva uso di queste nozioni. Il motivo è che Gödel mirava ad enunciare un teorema riguardante certi sistemi formali («*Principia Mathematica e sistemi affini*») che hanno senso anche se non si conosce l'*interpretazione* dei sistemi considerati (un teorema «sintattico»). Una delle piú semplici proprietà sintattiche di un sistema formale è quella di consistenza. Questa è una proprietà che un sistema formale possiede se e solo se non contiene teoremi della forma $p \wedge -p$ (per esempio, «$(1 = 1) \wedge -(1 = 1)$» non è un teorema in un sistema consistente).

Ora, dal momento che la consistenza è una proprietà semplice da definire e nel contempo una caratteristica intuitivamente molto importante di un sistema formale – invero, la sola proprietà che un sistema formale *deve* possedere (o che ad ogni costo non si deve sapere che non possiede) per essere matematicamente interessante – è naturale cercare una versione del teorema di Gödel che identifichi la vaga nozione di «soddisfacente» impiegata nella prima enunciazione informale del teorema esposta sopra con la precisa nozione sintattica di consistente. Lo stesso Gödel non giunse pienamente a questo risultato; tuttavia, vi giunse in seguito Rosser [1936], ed ora verrà enunciata la versione di Rosser del teorema di Gödel, versione che, come quella di Tarski, fu ottenuta solo qualche anno dopo le conferenze di Gödel.

4. *La versione di Rosser del teorema di Gödel.*

Se FS è un qualsiasi sistema formale consistente in cui è possibile definire le nozioni primitive del sistema Q e in cui tutti gli assiomi da A1 *ad* A7 *del sistema Q possono essere derivati come teoremi, allora il sistema FS contiene proposizioni indecidibili.*

Benché la versione rosseriana del teorema di Gödel sia oggi quella che piú spesso viene utilizzata, si enuncerà ora, a scopo di confronto ed in virtú del suo interesse intrinseco, il teorema originale di Gödel [1931]. Si potrà notare che si è preferito enunciare il teorema originale dopo due versioni dimostrate in seguito, perché esso contiene un concetto tecnico che è piú difficile da spiegare di quelli fin qui usati e che non sarebbe probabilmente stato introdotto se Gödel avesse trovato la dimostrazione della versione che del teorema avrebbe fornito in seguito Rosser.

5. *Il teorema originale di Gödel.*

Se FS è un qualsiasi sistema formale ω-consistente in cui è possibile definire tutte le nozioni primitive del sistema Q, e in cui tutti gli assiomi da A1 *ad* A7 *del sistema Q possono essere derivati come teoremi, allora il sistema FS contiene proposizioni indecidibili.*

La nozione di ω-consistenza utilizzata in questo teorema, e che verrà spiegata piú avanti, può essere chiarita informalmente nel modo che segue: un sistema è ω-inconsistente se è *a*) semplicemente inconsistente, oppure *b*) «quasi inconsistente» in un certo senso. Un sistema è ω-consistente se non è ω-inconsistente. Cosí un sistema ω-consistente è reso «soddisfacente» dalla seguente proprietà: è privo non solo di vere e proprie contraddizioni, ma anche di certi tipi di «quasi-contraddizione». Com'è facile immaginare, un sistema formale corretto deve essere ω-consistente, e cosí il teorema originale di Gödel come forza si colloca in una posizione intermedia tra le versioni successivamente fornite da Tarski e Rosser.

Da un lato, la versione tarskiana rappresenta senza alcun dubbio un indebolimento del teorema (benché interessante per ragioni indipendenti) poiché è implicata dal teorema originale di Gödel. D'altro canto, la versione di Rosser è piú forte del teorema di Gödel in quanto Rosser dimostrò che una classe piú ampia di sistemi formali contiene proposizioni indecidibili. Gödel mostrò che tutti i sistemi ω-consistenti in cui il sistema *Q* può essere interpretato contengono proposizioni indecidibili, ma lasciò aperto il problema dell'esistenza o meno di qualche sistema, *consistente*, ma non *ω-consistente*, che sia completo. (Essere «completo» equivale a non contenere proposizioni indecidibili). Rosser dimostrò che tutti i sistemi consistenti del tipo considerato contengono proposizioni indecidibili, anche quelli consistenti ma non ω-consistenti.

Il significato di questi teoremi per l'intera matematica è evidente. I matematici sono stati tradizionalmente portati ad assumere che i concetti di un qualunque ramo ben definito della matematica potessero essere resi tutti precisi dall'enunciazione di assiomi adeguati, e che ciò fatto tutte le verità di quel ramo della matematica sarebbero derivate come teoremi. Peano ha elaborato un insieme di assiomi per la teoria elementare dei numeri del quale si può dimostrare la completezza relativamente alla teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi è stata assiomatizzata in vari modi da Whitehead e Russell, Zermelo, Fraenkel, Neumann ed altri. Sembrava del tutto verosimile che questi sistemi di assiomi fossero almeno abbastanza completi da dimostrare tutti gli enunciati veri della teoria dei numeri. Vale a dire, sembrava possibile che un sistema come, ad esempio, i celebri *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell non contenesse alcuna proposizione indecidibile, e certamente ragionevole che la parte del sistema concernente la teoria dei numeri fosse completa. Il lavoro di Gödel dimostrò come queste convinzioni fossero errate. Nella versione rafforzata di Rosser questo lavoro mostrava come non solo i *Principia Mathematica*, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, e gli altri sistemi analoghi contenessero proposizioni indecidibili, e persino proposizioni indecidibili riguardanti la teoria dei numeri, ma anche come non ci fosse speranza alcuna di completare questi sistemi aggiungendo ulteriori assiomi.

Sin qui si è fatto riferimento alla versione tarskiana del teorema di Gödel come a una versione piú debole del teorema originale stesso. Va però notato che mentre le altre due versioni, quella originale di Gödel e quella rosseriana dipendono entrambe dagli assiomi del sistema dato (il che è semplicemente naturale dato che in quanto teoremi sintattici non hanno null'altro da cui dipendere), il teorema di Tarski vale per una classe di sistemi piú ampia di quelle finora considerate. In effetti, il teorema tarskiano si può leggere cosí:

6. *Il teorema di Tarski.*

Ogni sistema formale corretto FS in cui è possibile definire le nozioni primitive del sistema Q contiene proposizioni indecidibili.

Segue immediatamente dalla versione tarskiana del teorema di Gödel come è stata formulata precedentemente. Infatti le negazioni delle formule da A1 ad A7 non sono certo teoremi in un sistema formale *corretto* e quindi, se uno degli assiomi da A1 ad A7 non è un teorema in un sistema formale corretto (che contenga le nozioni primitive di Q o in cui queste possano essere introdotte per definizione), allora l'assioma in questione è esso stesso una proposizione indecidibile.

Cosí, il teorema di Tarski mostra che il contenere proposizioni indecidibili è una caratteristica di tutti i formalismi dotati di una certa *interpretazione*, laddove quello di Rosser prova che questa è una proprietà di tutti i formalismi dotati di una certa *struttura*.

Tornando alla versione originale di Gödel, va ancora precisata la nozione di ω-consistenza. Le definizioni formali sono le seguenti:

1) Un sistema formale è *ω-inconsistente* se e solo se esiste una qualche formula $P(x)$ del sistema tale che, per ogni numero intero n, $P(n)$ costituisce un teorema del sistema, mentre la generalizzazione $(n)P(n)$ è refutabile nel sistema (cioè $-(n)P(n)$ è un teorema del sistema).
2) Un sistema è ω-consistente se non è ω-inconsistente.

In questo articolo non si utilizzerà piú la nozione di ω-consistenza. Storicamente la sua funzione principale, come si è già notato, fu di consentire l'enunciazione di un teorema sintattico concernente l'esistenza di proposizioni indecidibili in un'epoca in cui la correzione proposta da Rosser all'argomentazione originale di Gödel non era ancora stata scoperta.

La memoria di Gödel [1931] conteneva non solo il teorema d'incompletezza appena enunciato, ma anche un altro teorema, a questo strettamente correlato, il cosiddetto secondo teorema d'incompletezza. Lo sfondo di questo teorema era il seguente: Hilbert aveva già scoperto che l'asserzione della consistenza di un sistema formale è *essa stessa* un'asserzione matematica, la cui verità o falsità può essere analizzata con mezzi matematici. Un modo di far ciò consiste nell'uso di questo accorgimento, dovuto a Gödel: si «codificano» le formule di un sistema formale assegnando a ciascuna di esse un intero positivo come suo numero (il che può essere fatto in uno qualsiasi dei modi che ci si presentano spontaneamente). L'insieme di tutti i teoremi del sistema formale corrisponde allora a un certo insieme di numeri: per la precisione, all'insieme dei «numeri di Gödel» dei teoremi. L'affermazione che il sistema formale è consistente può a questo punto essere riformulata in un'asserzione concernente i numeri in vari modi tra loro equivalenti. Per esempio, se H è il numero di Gödel della proposizione $1 = 0$, dire che P è consistente equivale a dire che H non appartiene all'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di P. Al posto di H si può, naturalmente, usare il numero di Gödel di una qualsiasi altra flagrante contraddizione. Appare chiaro che, se FS è un qualsiasi sistema formale, l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di FS è definibile nei termini della teoria dei numeri; ovvero, definibile in termini di N, $+$, $\cdot$, $=$, 1, 0, quantificatori, funzioni di verità e variabili. Cosí, se FS è un qualunque sistema formale, l'affermazione che FS è consistente è equivalente alla proposizione della teoria elementare dei numeri che dice che H non appartiene a un determinato insieme di numeri interi positivi definibile per mezzo della teoria dei numeri. E dal momento che questa proposizione è esprimibile nel linguaggio della teoria elementare dei numeri, è naturale cercarne una dimostrazione o una refutazione impiegando soltanto le tecniche della teoria elementare dei numeri. In effetti, l'obiettivo di Hilbert era quello di stabilire la consistenza di certi sistemi formali (che codificavano i rami principali della matematica) usando solo metodi «costruttivi» e «finitisti» tratti dalla teoria elementare dei numeri. Hilbert riteneva che riuscire in quest'impresa avrebbe significato dare una «fondazione» della matematica classica. Per esempio, se qualcuno avesse dubitato della verità o dell'autoevidenza intuitiva

di qualche assioma, diciamo, della teoria degli insiemi, si sarebbe perlomeno potuto convincerlo che l'impiego continuativo di questi assiomi non poteva condurre a contraddizioni (dimostrando la consistenza di un sistema che costituisse un'adeguata formalizzazione della teoria degli insiemi); e la dimostrazione di consistenza avrebbe usato soltanto i metodi piú sicuri e universalmente accettati della teoria elementare dei numeri. Gödel però distrusse questo programma in un sol colpo.

Il risultato ottenuto da Gödel riguardava i sistemi aventi assiomi d'induzione matematica (in effetti, tutte le occorrenze dello schema $(F(0) \wedge (x)(F(x) \supset \supset (F(x+1)))) \supset (x)F(x)$ nel linguaggio di Q vengono incluse tra gli assiomi) oltre agli assiomi da A1 ad A7 di Q. Se si conviene di chiamare PA – cioè aritmetica di Peano – il sistema che contiene *soltanto* gli assiomi di induzione matematica e quelli da A1 ad A7, allora PA è il sistema chiamato «aritmetica del prim'ordine» nell'articolo «Formalizzazione» di questa stessa *Enciclopedia*. (PA ha le stesse nozioni primitive di Q; soltanto l'insieme degli assiomi è ampliato). Gödel dimostrò:

7. *Il secondo teorema d'incompletezza di Gödel.*

Se FS è un qualsiasi sistema formale in cui è possibile definire le nozioni primitive di PA, e in cui gli assiomi di PA possono venir derivati come teoremi, allora la proposizione standard che afferma che il sistema FS è consistente non è essa stessa dimostrabile a meno che FS non sia inconsistente.

Si vedrà che il secondo teorema d'incompletezza dà un modo per trovare effettivamente proposizioni indecidibili in una qualsiasi estensione ω-consistente del sistema PA. (Gödel aveva già enunciato un metodo per questo scopo nella sua dimostrazione del primo teorema d'incompletezza, ma in questa sede non ci s'interesserà alla dimostrazione data da Gödel). Infatti, sia FS una qualsiasi estensione ω-consistente di PA. Sia $\mathrm{Con}(FS)$ la formula standard di PA impiegata per esprimere la proposizione che FS è consistente. Se dunque FS è semplicemente consistente, in virtú del secondo teorema d'incompletezza di Gödel, $\mathrm{Con}(FS)$ non è un teorema di FS. Può $-\mathrm{Con}(FS)$ essere un teorema di FS? Bene, se FS è consistente e $-\mathrm{Con}(FS)$ è un teorema di FS, allora FS è sicuramente non *corretto*; cosí lo stesso secondo teorema d'incompletezza di Gödel implica che qualsiasi estensione corretta del sistema PA deve contenere proposizioni indecidibili. Ma in realtà, se $-\mathrm{Con}(FS)$ è un teorema di FS, allora il sistema FS, prescindendo dalla correttezza, non è neppure ω-consistente. Per mostrare ciò s'immagini che nel sistema FS si siano assegnati dei numeri alle dimostrazioni in un qualsiasi modo che venga naturale, esattamente come per le formule, e «$\mathrm{Dim}(x,y)$» stia per l'affermazione che il numero intero x è il numero di Gödel di una dimostrazione della formula il cui numero di Gödel è y. «$\mathrm{Teor}(x)$» significhi che la formula contrassegnata dal numero di Gödel x è un teorema di FS. Teor può essere definito in termini di Dim in questo modo:

$\mathrm{Teor}(x) =_{def} (\exists y)\,\mathrm{Dim}(y,x)$. A questo punto, se il sistema FS non è consistente, allora, naturalmente, non è ω-consistente. Se, d'altro canto, il sistema FS è consistente e H è il numero di Gödel di «$1 = 0$», allora tutte le proposizioni seguenti devono essere vere: $-\mathrm{Dim}(0,H)$, $-\mathrm{Dim}(1,H)$, $-\mathrm{Dim}(1+1,H)$, ... Inoltre si può dimostrare che con un'adeguata formalizzazione di «Dim» ognuno di questi enunciati può essere verificato in PA, e quindi in tutte le estensioni di PA. Si noti ora che se la formula $-(n)\,-\mathrm{Dim}(n,H)$ è verificabile in FS, allora FS è ω-inconsistente. Ma la formula in questione è equivalente, per la logica elementare, alla formula $(\exists n)\,\mathrm{Dim}(n,H)$ e quest'ultima è equivalente a $-\mathrm{Con}(FS)$. In breve, se $-\mathrm{Con}(FS)$ è dimostrabile in FS, allora $-(n)\,-\mathrm{Dim}(n,H)$ è dimostrabile a sua volta in FS, e dal momento che ognuna delle formule $-\mathrm{Dim}(0,H)$, $-\mathrm{Dim}(1,H)$, $-\mathrm{Dim}(1+1,H)$ è pure dimostrabile in FS, questo significa che FS è ω-inconsistente.

Cosí si è visto che se FS è consistente, allora $\mathrm{Con}(FS)$ non è un teorema di FS (questo è il secondo teorema d'incompletezza di Gödel); e se FS è ω-consistente, allora neppure $-\mathrm{Con}(FS)$ è un teorema di FS. Quindi, se FS è una qualsiasi estensione del sistema PA, è possibile trovare effettivamente una proposizione indecidibile in FS: in effetti, per qualunque FS che risponda ai nostri requisiti, $\mathrm{Con}(FS)$ e $-\mathrm{Con}(FS)$ rappresentano una coppia di proposizioni indecidibili.

Si è spesso sostenuto che la proposizione indecidibile $\mathrm{Con}(FS)$ può essere sempre dimostrata vera, anche se ovviamente non in FS medesimo, ma per mezzo di un qualche ragionamento metamatematico. Invece questo è un errore. Se si crede che il sistema sia consistente, c'è ovviamente ragione di credere alla proposizione $\mathrm{Con}(FS)$ e di non credere alla proposizione $-\mathrm{Con}(FS)$, ma credere ad una proposizione è ben altra cosa dal possedere la *dimostrazione* matematica della sua verità. Ci sono molti sistemi formali che i matematici ritengono molto probabilmente consistenti, ma per i quali nessuno è riuscito a fornire una dimostrazione matematica assolutamente soddisfacente di consistenza. Per questi sistemi, tutto ciò che si può dire della coppia di proposizioni indecidibili, $\mathrm{Con}(FS)$, $-\mathrm{Con}(FS)$, è che si ritiene vera la prima e falsa la seconda in ogni caso: ma non si ha alcuna dimostrazione che la nostra congettura sia corretta.

Si è visto fin qui come i due teoremi d'incompletezza di Gödel abbiano fatto luce su una serie di ampi progetti fondazionali della matematica. In generale, si può dire che hanno rappresentato una disfatta per la tendenza «assiomatica» e «formalista» in filosofia della matematica. Questo perché il primo teorema d'incompletezza dimostra che la speranza di stabilire la nozione di «verità matematica», anche per rami ben definiti della matematica, come la teoria elementare dei numeri, per mezzo di un insieme finito di assiomi, è illusoria.

Inoltre, si è visto che un altro programma fondazionale della matematica, ovvero il programma che prevedeva di dimostrare la consistenza dei piú potenti sistemi matematici impiegando mezzi elementari, e in particolare i mezzi della teoria dei numeri, fu vanificato dal secondo teorema d'incompletezza di Gödel. Per il raggiungimento di questi risultati, la nozione di ricorsività ha svolto soltanto un ruolo minore e ausiliario (la nozione di «ricorsività primitiva» è stata

impiegata in connessione con la dimostrazione del primo teorema d'incompletezza di Gödel). Ciò nondimeno, come si vedrà piú avanti, i concetti della teoria della ricorsività possono essere usati non solo per fornire dimostrazioni molto semplici di versioni astratte del primo teorema d'incompletezza di Gödel, ma anche per fare luce sulle ragioni dell'esistenza di proposizioni indecidibili, e, per cosí dire, sulla loro «distribuzione».

8. *Ricorsività primitiva.*

Una gran quantità di insiemi e di funzioni in matematica è definita per mezzo di quelle che vengono chiamate «definizioni induttive». Queste definizioni si dànno solitamente in un certo numero di condizioni, piú una condizione «di esaustività» (talvolta lasciata inespressa) che dice che niente è cosí-e-cosí se il suo essere tale non deriva dalle regole precedenti. Non tutte le definizioni induttive sono propriamente definizioni ricorsive: grossolanamente, si può dire che una definizione ricorsiva di una funzione è una definizione induttiva in cui tutte le condizioni, eccetto quella di esaustività, possono essere enunciate sotto forma di equazioni. Forse un esempio chiarirà meglio il concetto. Sia $S(x)$ la funzione successore, vale a dire la funzione il cui valore per ogni numero intero x è $x+1$, e sia $I(x)$ la funzione identità, ovvero la funzione il cui valore per ogni numero intero x è x stesso. A questo punto la funzione $x+y$ può essere definita ricorsivamente in termini delle funzioni I ed S nel modo seguente:

$$x+0=I(x)$$
$$x+S(y)=S(x+y).$$

Dal momento che $I(x)=x$, la definizione avrebbe potuto anche scriversi in questo modo:

$$x+0=x$$
$$x+S(y)=S(x+y).$$

Tuttavia, il primo modo di scrivere questa definizione rende esplicito il fatto che la si può considerare come definizione di una nuova funzione, e cioè $x+y$, in termini di funzioni date, le funzioni identità e successore. Analogamente, la funzione $x\cdot y$ può essere definita ricorsivamente:

$$x\cdot 0=0$$
$$x\cdot S(y)=(x\cdot y)+x.$$

Continuando in questo modo è possibile costruire definizioni di tutte le consuete funzioni della teoria dei numeri; x^y, il numero dei divisori positivi di x, il massimo comun divisore di x e y, ecc. Queste definizioni sono altrettanti esempi di ciò che vien chiamata definizione per ricorsione primitiva. Nel caso di funzioni a una variabile (il caso di piú variabili è del tutto simile) ciò può essere generalizzato come segue: sia a un dato numero intero e sia g una data funzione: si dice

allora che una funzione f è definita per ricorsione primitiva in termini di a e g se f è definita in questo modo:

$$f(0)=a$$
$$f(S(x))=g(x,f(x))$$

(oppure $=g(f(x))$, se g è una funzione a un argomento).

Le funzioni fin qui definite sono tutte dette «funzioni ricorsive primitive». Piú generalmente sono dette ricorsive primitive alcune «funzioni iniziali» ed anche tutte le funzioni che possono essere ottenute da funzioni ricorsive primitive per mezzo di ricorsioni primitive e composizioni. La classe delle funzioni ricorsive primitive è quindi definita come la piú piccola classe contenente le funzioni iniziali e chiusa per composizione e ricorsione primitiva.

Va notato che la nozione di funzione ricorsiva primitiva risale ad almeno dieci anni prima del periodo che è stato preso in esame. Già all'inizio degli anni '20 apparvero analisi di questa nozione dovute a Hilbert, Skolem e altri. Al fine di mettere in evidenza i collegamenti tra la nozione di funzione ricorsiva primitiva e i teoremi di Gödel, si enunceranno ora due teoremi, di cui verranno omesse le dimostrazioni:

TEOREMA A. *Se tutte le funzioni ricorsive primitive a un argomento sono definibili in un sistema corretto FS, allora questo sistema contiene proposizioni indecidibili.*

TEOREMA B. *Se tutte le funzioni ricorsive primitive a un argomento sono computabili in un sistema formale ω-consistente FS, allora questo sistema contiene proposizioni indecidibili.*

Il teorema A è ovviamente strettamente connesso alla versione tarskiana del teorema di Gödel, e il teorema B è ovviamente strettamente connesso alla versione dello stesso Gödel del primo teorema d'incompletezza. È necessario spiegare che quando si dice che una funzione f è computabile in un sistema FS, ciò che si vuol dire è che esiste un termine, ad esempio $\tau(x)$, nel sistema formale tale che per ogni numero intero n c'è esattamente un numero intero m tale che $m=\tau(n)$ sia un teorema del sistema formale, e che $m=f(n)$. Il termine 'computabile' è stato usato grosso modo in questo senso da Church.

Esaminando piú a fondo i teoremi A e B, si vede che la condizione della definibilità di una funzione in un sistema formale, vale a dire, dell'esistenza di un'espressione, ad esempio $y=\tau(x)$, tale che per ogni numero intero n esista esattamente un numero intero m tale che $m=\tau(n)$ sia vero, e che $m=f(n)$, è una condizione semantica. D'altro canto, la condizione della computabilità di una funzione in un sistema formale è puramente sintattica, dal momento che la sua definizione si riferisce soltanto alla dimostrabilità e non alla verità (a rigore, le nozioni di ω-consistenza e computabilità hanno un vago sapore semantico, in quanto assumono la conoscenza almeno di parte dell'interpretazione del sistema formale in questione, e precisamente, *quali* espressioni corrispondono a *quali* numeri interi: tuttavia, non è necessario sapere nient'altro dell'interpretazione del sistema formale, e in questo senso le nostre nozioni possono ancora verosi-

milmente essere considerate sintattiche). La definibilità di tutte le funzioni ricorsive primitive in un sistema formale corretto è una condizione sufficiente perché il sistema contenga proposizioni indecidibili; e analogamente la computabilità di tutte le funzioni ricorsive primitive in un sistema formale almeno ω-consistente è una condizione sufficiente per la presenza in esso di proposizioni indecidibili. Cosí si è in grado di enunciare in termini di funzioni ricorsive primitive sia una condizione semantica sia una condizione sintattica perché un sistema contenga proposizioni indecidibili. Ecco ora i due teoremi riguardanti il sistema Q:

TEOREMA C. *Ogni funzione ricorsiva primitiva è definibile nei termini delle nozioni primitive del sistema Q.*

TEOREMA D. *Se FS è un qualsiasi sistema formale in cui è possibile definire le nozioni primitive del sistema Q in modo tale che tutti gli assiomi da* A1 *ad* A7 *possano essere derivati come teoremi, allora tutte le funzioni ricorsive primitive sono computabili in FS.*

Questi teoremi rendono manifesto il fatto che è sufficiente che una teoria sia un'estensione del sistema Q, oppure anche semplicemente che il sistema Q sia in essa interpretabile, perché questa teoria contenga proposizioni indecidibili. Il punto cruciale è che tutte le funzioni ricorsive primitive sono già computabili nel sistema Q, e quindi lo sono in tutte le estensioni consistenti di questo sistema.

9. *Ricorsione doppia, tripla, ecc.*

Fino a questo punto tutte le ricorsioni analizzate erano ad una sola variabile, il che significa che il valore di una funzione f in $n+1$ era stabilito in termini del valore di f in n. Cosí, conoscendo il valore di f in 0, si poteva determinare il valore di $f(1)$; quindi, conoscendo il valore di $f(1)$, si era in grado di computare $f(2)$; e cosí via. Inoltre, la situazione non cambiava nemmeno nel caso di funzioni a piú di una variabile.

Per definire una funzione a piú variabili, $f(x,y)$, per mezzo della ricorsione primitiva, ciò che è stato fatto è consistito semplicemente nel definire uniformemente $f(x,n+1)$ in termini di $f(x,n)$.

È tuttavia possibile definire una funzione per mezzo di quella che viene chiamata doppia ricorsione. Lo schema è molto complesso, e non lo si presenterà in questa sede. Si possono anche introdurre le nozioni di ricorsione tripla, quadrupla, e cosí via.

In precedenza, è stata chiamata ricorsiva primitiva una funzione che può essere definita in termini di certe funzioni iniziali per mezzo di ripetuti usi della composizione e della ricorsione primitiva. Similmente, una funzione è detta doppia ricorsiva se può essere definita a partire dalle funzioni ricorsive primitive per mezzo di usi ripetuti della composizione e della ricorsione primitiva e doppia; e tripla ricorsiva se può essere definita a partire dalle funzioni doppie ricorsive per mezzo di ripetuti usi della composizione e della ricorsione primitiva e tripla. In modo analogo si possono definire le classi sempre piú ampie delle funzioni

quadruple ricorsive, quintuple ricorsive, e cosí via. Si noti che queste classi sono state definite in modo tale che ognuna di esse è inclusa nella successiva: cioè, ogni funzione ricorsiva primitiva è anche una funzione doppia ricorsiva, ogni funzione doppia ricorsiva è anche una funzione tripla ricorsiva, ecc.

È sorprendente il fatto che tutte le funzioni effettivamente computabili che sono realmente usate nella matematica «ordinaria» sembrano essere ricorsive primitive. Benché spesso sia conveniente definire una funzione per mezzo della ricorsione doppia, è quasi sempre possibile sostituire una definizione siffatta, a costo di un piccolo aumento di complessità, con una definizione che faccia uso solamente di composizione e ricorsione primitiva. Cosí, il fatto che nella matematica ordinaria compaiano talvolta definizioni doppie ricorsive non deve far pensare che sia molto probabile imbattersi in una funzione doppia ricorsiva che non sia primitiva: in realtà, la maggior parte delle ricorsioni doppie può essere sostituita da ricorsioni primitive. In generale, si può dire che in matematica si trovano molto frequentemente dimostrazioni facenti uso della ricorsione doppia, molto meno frequentemente definizioni per mezzo di ricorsione doppia, e quasi mai funzioni doppie ricorsive «genuine», e cioè non primitive. Per questo motivo fu del tutto naturale, quando questi concetti furono introdotti, chiedersi se realmente *esistessero* funzioni doppie ricorsive non primitive. Forse tutte le funzioni ricorsive doppie, triple, e via dicendo sono già ricorsive primitive, nel quale caso tutta la gerarchia susseguente sarebbe inutile. Forse addirittura tutte le funzioni effettivamente computabili sono ricorsive primitive...?

Tuttavia, le cose non stanno cosí. È possibile costruire esempi di funzioni doppie ricorsive non primitive; di funzioni ricorsive triple non doppie; e cosí via. Quindi, le funzioni ricorsive primitive non esauriscono assolutamente l'universo delle funzioni che intuitivamente si chiamerebbero «funzioni ricorsive», ovvero delle funzioni che possono essere introdotte da schemi, come quelli visti in precedenza, che si descriverebbero naturalmente come schemi di ricorsione.

Sia $f(x,y)$ una qualsiasi funzione di due argomenti, e si considerino le funzioni a un argomento che possono essere ottenute sostituendo alla x un numero costante. Si chiamino queste funzioni $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ecc. In altri termini, per ogni x

$$f_0(x)=f(0,x)$$
$$f_1(x)=f(1,x)$$
$$f_2(x)=f(2,x).$$

Si dice che le funzioni $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sono *enumerate* dalla funzione $f(x,y)$. È possibile dimostrare che le funzioni ricorsive primitive a un argomento *non possono* essere enumerate da alcuna funzione ricorsiva primitiva a due argomenti. La prova di ciò è cosí breve che la si riporterà completamente:

Dimostrazione: Si supponga che esista una funzione ricorsiva primitiva $f(x,y)$ tale che le funzioni enumerate dalla funzione f (cioè le funzioni $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definite poco sopra) siano *tutte* le funzioni ricorsive primitive. Una funzione D sia definita nel modo seguente: $D(x)=f(x,x)+1$. Dal momento che D è stata definita per mezzo della composizione in termini della funzione di successione

e di f (che è per ipotesi ricorsiva primitiva), la funzione D è anch'essa ricorsiva primitiva. Ma f enumera *tutte* le funzioni ricorsive primitive, cosicché deve esistere un numero intero i tale che $D = f_i$. Quindi $D(i) = f(i,i)$, e cioè: $D(i) = f_i(i)$ oppure $D(i) = D(i) + 1$. Dal momento che $D(i)$ deve essere un numero intero lo si può sottrarre da ambo i membri di questa equazione, ottenendo $0 = 1$, che è una contraddizione. Quindi non può esistere una funzione ricorsiva primitiva $f(x,y)$ che enumeri *tutte* le funzioni ricorsive primitive.

Si è detto prima che è *alquanto* difficile trovare un esempio di funzione doppia ricorsiva non primitiva. Tuttavia, è estremamente facile, per quanto noioso, costruire un esempio di funzione doppia ricorsiva che enumera tutte le funzioni ricorsive primitive. In base al teorema appena dimostrato, questa particolare funzione doppia ricorsiva non dovrà essere primitiva. Questo è *un* metodo che è stato impiegato per costruire una funzione doppia ricorsiva non primitiva.

La dimostrazione data sopra del fatto che le funzioni ricorsive primitive non possono essere enumerate da una singola funzione ricorsiva primitiva ha fatto uso soltanto della proprietà che le funzioni ricorsive primitive comprendono la funzione di successore e sono chiuse rispetto alla composizione. Se ne deduce che ogni classe di funzioni chiuse rispetto alla composizione, che comprenda la funzione di successore, avrà la medesima caratteristica: le funzioni a un argomento della classe non potranno essere enumerate da una singola funzione a due argomenti della classe stessa. In particolare, le funzioni ricorsive doppie, triple, quadruple hanno tutte quante questa proprietà: non esiste una funzione doppia ricorsiva a due argomenti che enumeri tutte le funzioni doppie ricorsive a un argomento; non esiste alcuna funzione tripla ricorsiva a due argomenti che enumeri tutte le funzioni triple ricorsive a un argomento, ecc. Tuttavia è ancora una volta semplicissimo, per quanto ancora piú noioso, costruire un esempio di funzione tripla ricorsiva che enumeri tutte le funzioni doppie ricorsive; o costruire un esempio di funzione quadrupla ricorsiva che enumeri tutte le funzioni triple ricorsive; ecc. Procedendo in questo modo è di fatto possibile ottenere esempi di funzioni ricorsive triple non doppie, quadruple non triple, e cosí via. La conclusione di questo ragionamento è fondamentalmente negativa: benché si abbia una classe di funzioni ricorsive, la classe delle funzioni ricorsive primitive, che è abbastanza ampia per tutti gli scopi pratici, essa non esaurisce ovviamente l'intera classe delle funzioni che possono essere definite per ricorsione. Dal momento che per ogni classe fin qui citata esiste sempre una classe piú ampia, nessuna di queste può sperare di rappresentare l'intera classe delle funzioni «ricorsive generali». Cosí, ci si ritrova ancora col problema di fornire una definizione adeguata per questo concetto piú generale di funzione ricorsiva.

10. *La definizione di una funzione ricorsiva generale.*

Il problema di definire in termini precisi le nozioni di ricorsione e di funzione ricorsiva (vale a dire di funzione che può essere definita per ricorsione) fu infine risolto in due modi diversi. Una soluzione è dovuta a Church, e implica la

nozione di λ-definibilità nonché i sistemi particolari dello stesso Church che egli chiamava calcoli di λ-conversione. L'altra soluzione fu scoperta da Gödel, sulla base di un suggerimento di Herbrand, e fu in seguito semplificata da Kleene. È questa la soluzione che verrà descritta qui.

Osservando gli esempi fin qui dati, è facile notare la caratteristica che colpí Herbrand: e precisamente, che tutte le definizioni sono definizioni per mezzo di un sistema di equazioni. Questo condusse Herbrand a proporre la propria definizione di funzione ricorsiva: una funzione ricorsiva, egli suggerí, è una funzione che può essere implicitamente definita per mezzo di un sistema di equazioni. Questa definizione può sembrare in qualche modo troppo vasta; in effetti, se non si apportano delle restrizioni, si rivela di gran lunga troppo vasta. Myhill ha mostrato che non solo tutte le funzioni ricorsive generali sono definibili implicitamente per mezzo di sistemi di equazioni, ma anche tutte le funzioni che possono essere definite facendo uso dei quantificatori e delle funzioni di verità nei termini delle nozioni primitive della teoria Q (e tra queste si trovano molte funzioni non ricorsive) possono ugualmente essere definite implicitamente per mezzo di sistemi di equazioni; e cosí pure molte funzioni addirittura non definibili in termini delle nozioni primitive della teoria Q. Herbrand e Gödel di comune accordo suggerirono che si dovesse aggiungere la seguente caratteristica a quella di essere definibili per mezzo di un sistema di equazioni: che debba essere possibile derivare il valore della funzione f, per qualsiasi argomento x, dal sistema di equazioni.

È possibile osservare come il primo suggerimento fosse d'ispirazione semantica, laddove la soluzione finale di Herbrand e Gödel è sintattica. S'è iniziato col dire che le funzioni ricorsive sono quelle implicitamente *definibili* (in senso semantico) in sistemi formali d'una specie ben precisa, consistente soltanto di sistemi d'equazioni. D'altro canto, le funzioni ricorsive generali secondo la definizione di Herbrand e Gödel sono quelle funzioni che possono essere computate in sistemi formali d'una specie molto semplice: quelli che consistono d'un sistema d'equazioni e regole adatte per trarre delle derivazioni da questi sistemi.

Si consideri ora il problema di rendere precisa la nozione di ricorsione *generale*. La prima cosa da fare è dare un significato preciso alla nozione di sistema di equazioni. Ciò è presto fatto. Si definisce un'equazione come un'espressione della forma $t_1 = t_2$, dove t_1 e t_2 sono termini, e si definisce la nozione di termine come segue:

1) Il simbolo «0» da solo è un termine.
2) Una variabile numerica, x, x_1, x_2, ... da sola è un termine.
3) Se $a_1, \ldots, a_n$ sono termini e f è il simbolo di una funzione ad n argomenti, allora $f(a_1, \ldots, a_n)$ è un termine.
4) Nulla è un termine se il suo essere tale non deriva dalle clausole precedenti.

In relazione al formalismo delle funzioni ricorsive generali, si stabilisce di chiamare i numeri interi non negativi in questo modo: il nome dello zero sarà 0, il nome del numero uno $S(0)$, il nome del numero due $S(S(0))$, e cosí via.

Si può ora definire la nozione di definizione implicita: un sistema di equazioni Σ che contenga i simboli di funzione $f, s_1, \ldots, s_m, h_1, \ldots, h_n$, si dirà definizione implicita della funzione f in termini delle funzioni date $h_1, \ldots, h_n$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Esistono delle funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tali che quando ai simboli $h_1, \ldots, h_n$ sono attribuite le loro interpretazioni prestabilite, e i simboli $f, s_1, \ldots, s_m$ sono interpretati come rappresentanti rispettivamente $a_0, a_1, \ldots, a_m$, tutte le equazioni sono vere. (Ciò che questa condizione dice è che le equazioni *possono essere soddisfatte*, anche quando ai simboli $h_1, \ldots, h_n$ sono attribuite le loro interpretazioni prestabilite).
2) Esiste una funzione Φ tale che per tutte le funzioni $a_0, a_1, \ldots, a_m$, se le equazioni Σ sono vere quando ai simboli di funzione $h_1, \ldots, h_n$ sono attribuite le loro interpretazioni prestabilite e i simboli di funzione $f, s_1, \ldots, s_m$ sono interpretati come rappresentanti $a_0, a_1, \ldots, a_m$ rispettivamente, allora $a_0 = \Phi$. (Ciò che questa condizione dice è che le interpretazioni che soddisfano Σ sono *uniche* almeno per quanto concerne f).

Le funzioni che possono essere definite mediante usi ripetuti della definizione implicita a partire dalla funzione di successione saranno chiamate funzioni «definibili implicitamente». È stato dimostrato che la classe di queste funzioni è coestensiva con un'altra classe, molto importante e naturale, di funzioni: le cosiddette «funzioni iperaritmetiche».

Allo scopo di rendere precisa la nozione di «definizione per ricorsione generale» di Herbrand e Gödel è necessario stabilire le regole di derivazione ammesse per ottenere ulteriori equazioni da quelle date. Gödel decise di ammettere queste regole:

REGOLA 1. Per qualsiasi coppia di numeri interi n, m, e qualsiasi simbolo di funzione $h_1, h_2, \ldots$, rappresentante una funzione data, l'espressione $h_i(n)$ può essere sostituita in qualunque momento dall'espressione m, a condizione che $m = h_i(n)$ sia vero.

REGOLA 2. Da un'equazione $a = b$ si può derivare l'equazione $\ldots a \ldots = \ldots b \ldots$ dove $\ldots a \ldots$ è identico a $\ldots b \ldots$ salvo per il fatto di contenere a in zero o piú posti in cui $\ldots b \ldots$ contiene b («uguali per uguali»).

REGOLA 3. Da un'equazione $a = b$ si può derivare $b = a$.

REGOLA 4. Da due equazioni $a = b$ e $b = c$ si può derivare $a = c$.

REGOLA 5. Da un'equazione $a = b$ si può derivare un'altra equazione $a' = b'$ dove $a' = b'$ è come $a = b$ salvo per il fatto che una variabile libera x è stata sostituita da un qualche numero n.

Infine, Σ è una definizione per ricorsione generale se è una definizione implicita e i valori di f sono computabili per mezzo delle regole sopradescritte a partire da Σ. Se il numero di funzioni date è 0, allora la funzione f definita dal sistema Σ è detta funzione ricorsiva generale.

Si potrebbero anche caratterizzare le funzioni ricorsive generali come quelle funzioni che possono essere definite a partire dalla funzione di successione mediante ripetuti usi di ricorsione generale e composizione; tuttavia, come si vedrà in un attimo, la stessa funzione di successione è definibile a partire da zero funzioni mediante ricorsione generale (il che equivale a dire che la funzione di successione è ricorsiva generale); e inoltre l'uso della composizione può essere ricondotto all'uso della ricorsione generale. Per verificare quanto s'è appena detto, si osservi che la funzione di successione è definita per ricorsione generale dalla singola equazione $S(x) = S(x)$. Infatti, da questa equazione è possibile derivare successivamente $S(0) = S(0)$, $S(S(0)) = S(S(0))$, ... e questi sono tutti i valori della funzione di successione. Analogamente, la funzione d'identità è definibile per ricorsione generale, per mezzo dell'equazione $I(x) = x$, e la funzione di costante $C_n(x) = SSS \ldots S(0)$, con n occorrenze di S, è definita per ricorsione generale dall'equazione appena prodotta. Se ne deduce che l'impiego di «funzioni iniziali» in rapporto alla ricorsione generale non è necessario.

Similmente, neppure l'uso della composizione è necessario in rapporto alla ricorsione generale, dal momento che, se le funzioni f e g sono definite mediante ricorsione generale, è sufficiente aggiungere all'insieme di equazioni che definisce le funzioni f e g l'equazione $h = f(g(x))$ al fine di ottenere una definizione ricorsiva generale della funzione h.

Infine, non è necessario ammettere usi ripetuti della ricorsione generale, in quanto il risultato dell'unione di un qualsiasi numero finito d'insiemi di equazioni è ancora un insieme di equazioni. Cosí, qualsiasi funzione che può essere definita a partire dalle nostre consuete funzioni iniziali, mediante reiterati usi di ricorsione generale e composizione, può essere definita a partire da zero funzioni iniziali mediante un unico uso della ricorsione generale.

Se una funzione f può essere definita per ricorsione generale a partire da un certo numero di funzioni date, $h_1, \ldots, h_n$, allora la funzione f è detta generale ricorsiva in $h_1, \ldots, h_n$. La nozione di funzione generale ricorsiva in altre funzioni ha svolto un ruolo importante in successivi sviluppi. Ciò malgrado, ci si limiterà alle funzioni generali ricorsive; ovvero, alle funzioni generali ricorsive in un insieme di zero funzioni.

La seguente citazione di Kleene sembra essere una chiusura appropriata per questa esposizione: «Gli esempi di schemi di definizione di una funzione che abbiamo fin qui convenuto di chiamare "ricorsioni" possiedono due caratteristiche: 1) Sono espressi per mezzo di equazioni nel modo che abbiamo precedentemente analizzato... 2) Sono definizioni per induzione matematica, nell'una o nell'altra forma, salvo nel caso banale in cui sono definizioni esplicite.

«La caratterizzazione di tutte le "funzioni ricorsive" fu raggiunta con la definizione di "funzioni generali ricorsive" nel 1934 da parte di Gödel, che elaborò un suggerimento di Herbrand. Questa definizione viene ottenuta con una semplice generalizzazione, che consiste nell'assumere la caratteristica 1) come definizione stessa.

«Diciamo allora che una funzione Φ è generale ricorsiva se esiste un sistema e di equazioni che la definisce ricorsivamente.

«Questa scelta potrà forse apparire strana dal momento che la parola "ricorsione" trae la propria origine dal verbo "ricorrere", e l'induzione matematica è

lo strumento che ci permette di maneggiare processi ricorrenti. Il significato della scelta non è che la caratteristica 2) mancherà ad una qualche ricorsione particolare, ma che questa caratteristica viene trasferita dalla definizione all'applicazione della definizione medesima. Per dimostrare con mezzi finitistici che un dato schema ha la caratteristica 1) si avrà presumibilmente da fare in qualche modo uso dell'induzione matematica. Ma nel definire la totalità delle funzioni generali ricorsive, tralasciamo ogni tentativo di caratterizzare a priori sotto quale forma dovrà manifestarsi il principio intuitivo dell'induzione. (Dai teoremi di Gödel... sappiamo che il tentativo di raggiungere una caratterizzazione di questo tipo per mezzo del sistema formale della teoria dei numeri è incompleto)» [1952, pp. 273-74].

11. *I calcoli di λ-conversione.*

Come è stato osservato in precedenza, il problema di dare un significato preciso alla nozione di «funzione definibile mediante ricorsione» fu affrontato in due diversi modi. L'uno, quello di Herbrand-Gödel-Kleene, è stato appena descritto. L'altro fu escogitato da Church, che ci lavorò particolarmente negli anni 1933-1936. Per quanto *sia* una definizione formale di «λ-definibilità» *sia* una dimostrazione pubblicata della coestensività delle funzioni λ-definibili con le funzioni generali ricorsive siano state disponibili solo nel 1936 [Church 1936*b*; Kleene 1936], le idee centrali di questo approccio erano perfettamente sviluppate fin dal 1934, e Church era già allora ragionevolmente convinto che le funzioni λ-definibili si sarebbero rivelate coestensive con le funzioni generali ricorsive di Gödel e Kleene. Ridotta ai minimi termini, l'idea fondamentale di Church fu quella di costruire un calcolo in cui fosse assunta come primitiva l'operazione di iterazione. Per iterazione di una funzione si intende l'applicazione ripetuta della funzione stessa. Cosí, se h è una qualsiasi funzione, allora il primo iterato di h è h stessa; il secondo iterato di h è la funzione il cui valore per un qualsiasi x è $h(h(x))$, ovvero, come si scriverà d'ora in poi, $hh(x)$; il terzo iterato di h è la funzione il cui valore per un qualsiasi x è $h(hh(x))$ (o, piú semplicemente, $hhh(x)$); e cosí via. Ciò che Church fece fu di definire i numeri interi in modo tale che il risultato dell'«applicazione» d'un qualsiasi numero intero n alla funzione h sia semplicemente l'iterato ennesimo di h (il che significa che nel sistema di Church i numeri interi sono essi stessi delle funzioni). In altri termini, se $\boldsymbol{n}$ è un qualsiasi numero intero, e h una qualsiasi funzione, allora nel sistema di Church $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{h})$ è la funzione il cui valore per un qualsiasi x è $\boldsymbol{hhh...h}(x)$, con n occorrenze di $\boldsymbol{h}$.

Ciò che Church pensava era che tutte le forme di ricorsione dipendessero essenzialmente dall'iterazione; e che le funzioni ricorsive avrebbero finito per rivelarsi identiche alle funzioni computabili in un adeguato sistema formale, posto che le funzioni computabili in quel sistema formale fossero chiuse per composizione, iterazione, e certi tipi semplici di definizione esplicita. Di conseguenza egli stabilí di trovare il modo piú semplice e diretto possibile per includere

l'operazione di iterazione nelle basi primitive di un sistema formale; e, in particolare, per formalizzare la definizione di numero intero sopra tratteggiata. Chiamò il sistema risultante λ-calcolo, e le funzioni in esso definibili «λ-definibili».

12. *La tesi di Church; insiemi ricorsivi; insiemi ricorsivamente enumerabili.*

La tesi di Church, cui si è fatto cenno nell'articolo «Logica» in questa stessa *Enciclopedia*, può ora essere enunciata nella sua forma storica: «Una funzione di numeri interi positivi è effettivamente calcolabile se e solo se è λ-definibile»! [Church 1936*b*, p. 346, nota 3].

Church osserverà piú tardi: «La nozione di metodo effettivo per il calcolo dei valori di una funzione, o la nozione di una funzione per la quale esiste un metodo siffatto, occorre tutt'altro che raramente in connessione con problemi matematici, ma è comunemente lasciata al livello intuitivo, senza che se ne tenti un'esatta definizione. I noti teoremi concernenti la λ-definibilità, o ricorsività, suggeriscono insistentemente che la nozione di funzione effettivamente calcolabile riceva un'esatta definizione dall'essere identificata con quella di funzione λ-definibile... Come in tutti i casi in cui si propone una definizione formale di ciò che in un primo tempo costituiva un'idea empirica, non v'è possibilità di fornire una dimostrazione completa; ma chi scrive ha ben pochi dubbi sul fatto che questa identificazione sia definitiva» [1941, p. 41].

Finora è stata considerata la nozione di effettività solo in quanto connessa al problema del calcolo del valore di una funzione. È tuttavia interessante considerare altri tipi di problemi per i quali si potrebbe richiedere una soluzione effettiva. Per esempio, ci si potrebbe domandare se un dato insieme di numeri interi positivi sia decidibile, nel senso che esista una procedura effettiva per dire se un qualunque numero arbitrario appartenga all'insieme stesso. Secondo la teoria di Church, questa nozione può essere resa precisa identificando gli insiemi decidibili di numeri interi con gli insiemi ricorsivi, dove per insieme ricorsivo di numeri interi si intende un insieme la cui funzione caratteristica è ricorsiva, o, che è lo stesso, λ-definibile. (La funzione caratteristica di un insieme è quella che assume valore 1 per i numeri appartenenti all'insieme stesso, e 0 per tutti gli altri numeri).

Questo porta ad un'altra enunciazione ancora del teorema di Church:

Un insieme di numeri interi è decidibile se e solo se è ricorsivo.

Un altro concetto intuitivo di cui si potrebbe chiedere una definizione precisa è quello di insieme generato di numeri interi. Un insieme di numeri interi si dice generato se è possibile dare uno schema di calcolo per mezzo del quale si possano ottenere l'uno dopo l'altro tutti gli interi dell'insieme (non necessariamente nel giusto ordine). In altre parole, un impiegato che fosse in grado di continuare il computo per sempre otterrebbe soltanto elementi dell'insieme, e per ogni elemento $\boldsymbol{k}$ esisterebbe un intervallo finito di tempo a partire dall'inizio del computo tale che k comparirebbe dopo quest'intervallo.

Intuitivamente, si è fortemente portati ad aspettarsi che ogni insieme generato sia decidibile; ma questo è un caso in cui l'intuizione sbaglia. Cosí, l'insieme dei teoremi di un qualsiasi sistema formale è un insieme generato, ma non è assolutamente vero che l'insieme dei teoremi di un qualsiasi sistema formale sia decidibile, dal momento che si conoscono dei sistemi formali il cui problema di decisione non è risolubile. Per esempio, se T è un dispositivo di calcolo che ha leseguenti proprietà: 1) stampa solo teoremi di Q; 2) per ogni teorema S di Q esiste un intervallo finito di tempo a partire dall'inizio del computo, tale che T stampa S dopo quest'intervallo – allora si sa che il problema se una qualunque formula ben formata di Q sarà o non sarà eventualmente stampata da T non è risolubile con mezzi effettivi.

Sarebbe scorretto tentare di precisare la nozione di insieme generato identificandola con quella di insieme ricorsivo; tuttavia, si può rendere precisa la nozione di insieme generato identificandola con quella di insieme ricorsivamente enumerabile, dove per insieme ricorsivamente enumerabile s'intende un insieme *a*) vuoto, o *b*) identico all'insieme dei valori prodotti da una qualche funzione generale ricorsiva.

La tesi seguente è ancora un'altra conseguenza della tesi di Church:

Un insieme di interi positivi è generato se e solo se è ricorsivamente enumerabile.

Quando si dice che questa tesi è una conseguenza della tesi di Church, non s'intende dire che si possa fornire una dimostrazione formale: non bisogna sperare di ottenerla, dal momento che ci si trova di fronte a tesi informali che si riferiscono alle nozioni intuitive di insieme generato e di funzione effettivamente computabile. Ciò nondimeno, si può dare un'argomentazione informale che sembra piuttosto convincente.

In primo luogo, si supponga che un insieme di interi possa essere generato (per convenzione, l'insieme vuoto sia considerato generato). Se l'insieme è non-vuoto, si associ allo schema di calcolo che genera l'insieme una funzione f nel modo seguente: l'n-esimo numero ottenuto mediante l'impiego dello schema di calcolo è il valore n-esimo della funzione f. In altre parole, se l'n-esimo numero generato dallo schema di calcolo è m, allora si ponga $m=f(n)$. Se lo schema di calcolo ha la caratteristica di generare un numero infinito di interi, allora è chiaro che la funzione f appena definita avrà un valore per ogni intero n. Non solo, ma sarà una funzione effettivamente calcolabile, dal momento che per ogni intero n è possibile trovare l'intero m tale che $m=f(n)$ semplicemente applicando lo schema di calcolo finché non sono stati generati esattamente n interi. L'ultimo intero sarà allora $f(n)$.

Questo argomento dimostra soltanto che gli insiemi generati infiniti sono ricorsivamente enumerabili; ma è banale far vedere che gli insiemi generati finiti sono ricorsivamente enumerabili, dal momento che per ogni insieme finito S si può facilmente trovare una funzione ricorsiva che assuma tutti e soli i valori compresi nell'insieme S.

Questo completa la nostra argomentazione in un senso. Ma andare nell'altro senso – vale a dire, mostrare che qualsiasi insieme ricorsivamente enumerabile

S può essere generato – è ancora piú facile. Se l'insieme è vuoto, qualsiasi schema di calcolo che non porti mai a un intero come risultato farà al caso nostro. Se l'insieme è non-vuoto, allora, in base alla definizione di insieme ricorsivamente enumerabile, deve esistere una funzione computabile f tale che S sia l'insieme dei valori assunti da f. Cosí lo schema di calcolo consiste semplicemente nel computare i valori $f(0), f(1), f(2), \ldots$ e scrivere questi numeri. In questo modo, per ogni elemento dell'insieme S dovrà occorrere un tempo finito trascorso il quale tale elemento viene scritto; poiché, se n appartiene ad S, allora, in base alla definizione di S, deve esistere un m tale che $n=f(m)$, e $f(m)$ sarà l'n-esimo intero scritto nel corso del calcolo.

Si osservi che i «calcoli» impiegati per generare insiemi infiniti sono gli unici calcoli, fra quanti sono oggetto della teoria della ricorsività, cui non è richiesto di terminare dopo un tempo finito. Tuttavia, anche a questi è pur sempre richiesta una certa «proprietà di finitezza»: vale a dire, per ogni intero n che viene scritto nel corso del calcolo, si richiede che esista un certo tempo finito t tale che n venga scritto esattamente al tempo t. Non ci si occupa in alcun modo della nozione di un intero che venga scritto a un tempo «infinito».

Ora che sono state precisate le varie nozioni intuitive di funzione effettivamente computabile, di insieme decidibile e di insieme generato, si possono rendere a loro volta precise alcune domande sui rapporti tra queste nozioni. Per esempio, è possibile adesso dare rigorosa formulazione alla domanda: «Gli insiemi generati sono tutti decidibili?» E, come indicato piú sopra, si trova che la risposta a questa domanda (o meglio, alla domanda precisa ad essa correlata: «Gli insiemi ricorsivamente enumerabili di interi positivi sono tutti insiemi ricorsivi di interi positivi?») è negativa.

13. *Problemi irresolubili.*

Anche prima della teoria della ricorsività e della tesi di Church, occasionalmente capitava ai matematici di asserire che questo o quest'altro problema poteva essere risolto con mezzi effettivi. Questo era possibile perché nei casi in questione realmente si aveva una prova dell'enunciato piú forte che affermava che il particolare problema q era risolubile con il metodo m, dove m stava per un qualche metodo definitamente specificato. Se il metodo m era chiaramente effettivo, allora si aveva generale consenso nell'affermare che il problema q era risolubile con un metodo effettivo, anche se non era disponibile una definizione precisa del concetto generale di «metodo effettivo». Questo è solo un caso particolare del fatto generale per cui si può essere in grado di riconoscere alcuni oggetti come «chiari casi» d'una nozione, pur senza avere alcuna rigorosa definizione della nozione stessa.

L'enunciato che un particolare problema q è risolubile con un metodo effettivo è un enunciato esistenziale. Vale a dire, afferma solamente che *esiste* un metodo effettivo m che risolve il problema q. Gli enunciati esistenziali puri hanno sempre la caratteristica di poter essere dimostrati da un solo esempio. In questo

caso, l'esempio richiesto è semplicemente un esempio di metodo m che risolva il problema q.

L'enunciato che un particolare problema *non* è risolubile con alcun metodo effettivo, invece, è un enunciato universale – vale a dire, ciò che afferma è che *tutti* i metodi effettivi sono metodi che *non* risolvono il problema q. Un enunciato di questo tipo è un enunciato su tutti i membri di una classe infinita: questo perché la classe di tutti i metodi effettivi è una classe infinita. E cosí, non c'è alcuna speranza di dimostrare questo enunciato in mancanza di una definizione precisa di «metodo effettivo». Per questo motivo, prima della tesi di Church, la letteratura matematica conteneva enunciati affermanti che una o un'altra cosa *poteva* essere fatta con un metodo effettivo, ma non conteneva enunciati affermanti che qualche cosa *non* poteva essere fatta con un metodo effettivo. In effetti, prima della tesi di Church, i matematici ritenevano che un enunciato di questo tipo potesse essere soltanto una speculazione informale; che non fosse passibile di una rigorosa formulazione, e meno che mai di una rigorosa dimostrazione. Con la pubblicazione della tesi di Church, la situazione divenne molto diversa. Si poteva guardare ad alcuni tradizionali problemi matematici che richiedevano che si trovasse un metodo effettivo per fare una certa cosa, e considerare la possibilità di ottenere una soluzione negativa: e cioè dimostrare, almeno in alcuni casi, che non esisteva alcun metodo effettivo.

Due di questi problemi per cui si trovò una soluzione negativa sono il problema della parola per i gruppi, e il decimo problema di Hilbert. Il problema della parola per i gruppi non verrà qui descritto; basti dire che dopo molti anni di ricerche e dopo molti risultati preliminari, che suggerivano ma non stabilivano definitivamente la sua irresolubilità, questa fu finalmente provata da Novikov nel 1955. Due o tre anni dopo una dimostrazione completamente diversa, e sostanzialmente piú semplice, venne scoperta da Boone.

Il decimo problema di Hilbert consiste nel fornire un metodo effettivo per stabilire se una qualsiasi equazione diofantea possieda o meno una soluzione (se cioè possieda o meno una soluzione fra tutti i numeri). Una equazione diofantea è semplicemente un'equazione della forma $p=q$, dove p e q sono polinomi con coefficienti interi. Per esempio, $x^2+y^2=z^2$ è un'equazione diofantea, ed è risolubile nell'insieme degli interi positivi, dal momento che $x=3$, $y=4$, $z=5$ è una soluzione. Il decimo problema di Hilbert fu risolto dal lavoro collettivo di Davis, Putnam e Robinson [1961] e Matijasévič [1970]. La soluzione è «negativa»: fu dimostrato che un tale metodo effettivo non esiste.

14. *Problemi connessi coi sistemi formali.*

I problemi cui si è fatta allusione nel paragrafo precedente non erano particolarmente connessi con un qualche sistema formale. Esistono tuttavia molti problemi di decisione relativi a sistemi formali. Primo tra tutti, il problema (che fu risolto negativamente da Church) se *tutti* i sistemi formali hanno un problema di decisione risolubile, vale a dire, se l'insimee dei teoremi di un qualsiasi sistema formale è sempre un insieme ricorsivo. Con i metodi di Church si può dimostrare non solo che esistono sistemi formali i cui problemi di decisione sono irrisolubili, ma che in particolare il sistema Q descritto nel § 1 e tutte le sue estensioni consistenti hanno problemi di decisione irresolubili. Seguendo Tarski e chiamando *essenzialmente indecidibile* un sistema quando tutte le sue estensioni consistenti sono indecidibili (e cioè, hanno problemi di decisione irresolubili), si può dire che il sistema Q non è solamente indecidibile ma essenzialmente indecidibile.

Se le nozioni primitive di un sistema A sono definibili in termini delle nozioni primitive di un sistema B in modo tale che gli assiomi del sistema A possono essere derivati come teoremi nel sistema B, allora Tarski dice che il sistema A è *interpretabile* nel sistema B. Un sistema può essere indecidibile anche se qualche sua estensione è decidibile. Per esempio, la logica elementare – vale a dire, la normale teoria della quantificazione – è indecidibile, ma vi sono molti assiomi che si potrebbero aggiungere alla normale teoria della quantificazione e che porterebbero ad un sistema decidibile. In effetti, se tutte le estensioni della teoria della quantificazione fossero indecidibili, allora qualunque sistema formale, nella formalizzazione corrente, sarebbe indecidibile, dal momento che ciò che s'intende per sistema formale nella «formalizzazione corrente» è semplicemente un sistema formale assiomatizzato nella teoria della quantificazione (o «calcolo funzionale del primo ordine»). Proprio come un sistema indecidibile può avere delle estensioni decidibili, cosí un sistema può essere indecidibile benché qualche sistema in cui esso è interpretabile sia decidibile. Tuttavia, è facile dimostrare che un sistema essenzialmente indecidibile non può avere questa proprietà. Se un sistema è essenzialmente indecidibile, lo sono pure tutti i sistemi in cui esso è interpretabile. Cosí, non solo tutte le estensioni del sistema Q, ma anche tutti i sistemi in cui Q è interpretabile sono indecidibili. Questa classe di sistemi – la classe di tutti i sistemi in cui è interpretabile il sistema Q – è esattamente la classe di sistemi che è stata considerata prima.

Oltre ad interrogarsi sulla risolubilità dei problemi di decisione per varie formalizzazioni della teoria dei numeri e della teoria della quantificazione, ci si potrebbero anche porre le stesse domande sui problemi di decisione di un gran numero d'interessanti teorie matematiche: ad esempio, la teoria formale dei gruppi, e le teorie formali di un gran numero di altri tipi di strutture matematiche, anelli, campi, ecc. L'indecidibilità di tutte le teorie citate è stata stabilita principalmente mostrando che il sistema Q è interpretabile in esse, o applicando un teorema di Tarski, che afferma che se una teoria essenzialmente indecidibile è interpretabile anche solo in un'estensione finita di una teoria T avente le stesse costanti di T, allora la teoria T è indecidibile. La monografia di Tarski, Mostowski e Robinson *Undecidable Theories* [1953] è divenuta un punto di riferimento costante per chi opera in questo ramo della logica.

15. *La nozione di problema.*

La nozione di problema, e dell'essere un problema irresolubile con mezzi effettivi, è stata usata frequentemente in questo articolo; ma potrebbe essere utile dedicare alcune parole a chiarire il suo significato nella teoria della ricorsività. Allo scopo di precisare la nozione di problema, si stabilisca d'intendere per *domanda* una domanda in senso ordinario, alla quale però sia possibile rispondere 1) sí o no, 2) con un singolo numero. Cosí «Esistono infiniti numeri primi?» è una domanda in questo senso, come pure lo è «Qual è la radice di 2?»

Con *problema* s'intenderà semplicemente una classe infinita di domande. È da notare che la nozione di irrisolubilità si applica solo ai problemi e mai alle domande. La ragione è che ogni singola domanda, o numero finito di domande, è sempre risolubile con mezzi effettivi. È ovvio che esiste sempre un metodo effettivo per ottenere un numero finito di sí e di no comunque disposti (o un qualunque insieme finito d'interi comunque disposti). Cosí, qualunque numero finito di risposte corrette alle domande può sempre essere ottenuto con un metodo effettivo. Si noti che la «effettiva risolubilità» fa soltanto riferimento all'esistenza di un metodo per *ottenere le risposte* e non richiede l'esistenza di un metodo effettivo, in qualunque senso, per *dimostrare che sono le risposte giuste*. È questo il motivo per cui si dice che c'è un metodo effettivo per «rispondere» a qualsiasi numero finito di domande.

Se ci si trova di fronte a una classe infinita di domande, però, la situazione si fa piú interessante. In questo caso, anche se ci si accontenta di una procedura per ottenere le risposte corrette, e non si richiede alcuna prova che le risposte ottenute *siano* realmente corrette, si può dimostrare che una tale procedura può anche non esistere. In termini piú precisi, questo significa che può non esistere una funzione generale ricorsiva g che abbia la proprietà che, per ogni i, $g(i) = 1$ se e solo se la risposta alla i-esima domanda nella classe è sí. Se le domande della classe sono del tipo che richiede come soluzione un numero intero, piuttosto che sí o no, l'affermazione che il problema è irresolubile va interpretata nel senso che non esiste una funzione generale ricorsiva g avente la proprietà che, per ogni intero i, $g(i) = n$ se e solo se n è la risposta alla i-esima domanda nella classe. Si noterà che questa definizione della «irresolubilità effettiva» di un problema presuppone che alle domande nella classe siano stati in qualche modo assegnati dei numeri di Gödel.

Il problema di decisione per un sistema formale è un problema nel nostro senso tecnico, in quanto può essere identificato con la classe infinita che comprende tutte le domande della forma «A è un teorema di FS?», dove A è una qualsiasi formula ben formata di FS. Assumendo questa definizione di «problema di decisione di FS», si vedrà con esattezza che cosa significa dire che un sistema formale FS ha un problema di decisione irresolubile: significa che non esiste alcuna funzione generale ricorsiva g tale che, per ogni intero i, $g(i) = 1$ se e solo se la formula il cui numero di Gödel è i è un teorema di FS. Accettando la tesi di Church (che le funzioni generali ricorsive siano tutte le funzioni effettivamente computabili), si vede che questo rende in realtà la nozione intuitiva di irresolubilità del problema di decisione di un sistema formale: la non-esistenza di un «metodo effettivo» per dire se una arbitraria formula ben formata A sia o meno un teorema del sistema.

16. *I teoremi di Church.*

Il primo problema matematico definito di cui si provò la irresolubilità con mezzi effettivi fu un problema nel calcolo di λ-conversione che nel 1936 Church dimostrò essere irresolubile. Church descrive questo problema nei seguenti termini: «Possiamo ora fornire in vari modi esempi di funzioni non effettivamente computabili. In particolare è dimostrato che... se l'insieme delle formule ben formate del calcolo di λ-conversione sono enumerate in un qualche modo (impiegando una qualsiasi delle molte enumerazioni che si suggeriscono spontaneamente), e se f è la funzione tale che f è 2 o 1 a seconda che la n-esima formula di questa enumerazione abbia o meno forma normale, allora f non è λ-definibile» [1941, p. 42].

Si può dimostrare che l'insieme di tutti i numeri interi n, tali che n è il numero di Gödel di una formula del calcolo di λ-conversione avente forma normale, è definibile nel sistema Q. Si chiami *aritmetico* un insieme di interi definibile nel sistema Q. (Dal momento che la nozione di «definibilità» si riferisce solo ai concetti primitivi di un sistema, e non ai particolari assiomi scelti, si può indifferentemente dire, anziché definibile nel sistema Q, definibile in termini di $+$, $\cdot$, 0, 1, $=$, quantificatori su numeri non negativi, e funzioni di verità). Usando questo nuovo termine, è possibile ora riformulare questo teorema di Church come segue:

PRIMO TEOREMA D'INDECIDIBILITÀ DI CHURCH. *Esiste un insieme aritmetico di interi positivi che non è ricorsivo.*

Si noterà che è stato indebolito il primo teorema d'indecidibilità di Church in modo tale da eliminare il riferimento al calcolo di λ-conversione. La ragione che ha indotto a ciò sta semplicemente nel fatto che i calcoli di λ-conversione non sono oggi molto studiati, laddove la nozione di insieme aritmetico riveste notevole importanza nei piú recenti sviluppi. Siccome quello che si sta chiamando «Primo teorema d'indecidibilità di Church» segue quasi immediatamente dal teorema che Church ha dimostrato in realtà, sembra che quella qui usata sia una forma piú utile per riferimenti successivi.

Questo teorema implica che l'insieme delle proposizioni vere di Q non sia un insieme ricorsivo. E per quanto riguarda l'insieme delle proposizioni dimostrabili di Q, vale a dire l'insieme dei teoremi di Q? La risposta è che le tecniche di Church possono anche essere usate per provare che neppure questo insieme è ricorsivo. L'idea fondamentale della dimostrazione è che la formula $F(x)$, che rappresenta l'insieme dei numeri di Gödel delle formule del calcolo di λ-conversione aventi forma normale, può essere costruita in modo tale che, per ogni

intero n, se n è il numero di Gödel di un termine che ha forma normale, allora $F(n)$ è un teorema di Q. Se si desse anche il caso che ogniqualvolta n è il numero di Gödel di un termine *non* avente una forma normale, allora $-F(n)$ è un teorema di Q, non esisterebbero in Q proposizioni indecidibili della forma $F(n)$. Vale a dire, tutti gli enunciati della forma $F(n)$ sarebbero decidibili in Q. Ma, dal momento che un insieme di enunciati decidibile in un sistema formale è sempre un insieme ricorsivo, seguirebbe da ciò che l'insieme degli interi n tali che n è il numero di Gödel di un termine avente forma normale, è un insieme ricorsivo contrariamente al risultato di Church. Pertanto, dal primo teorema d'indecidibilità di Church è possibile dedurre l'indecidibilità della teoria Q sia rispetto alla classe delle proposizioni vere, sia rispetto alla classe di quelle dimostrabili.

Dopo aver dimostrato il teorema sopra citato, immediatamente Church passò ad analizzare la stessa logica elementare. Sia FS la teoria formalizzata della quantificazione (calcolo funzionale del primo ordine) in una qualsiasi delle consuete equivalenti formalizzazioni. FS ha un problema di decisione risolubile? In altre parole, l'insieme dei teoremi della teoria della quantificazione è ricorsivo o no? Church [1936*a*] rispose negativamente anche a questa domanda in un articolo pubblicato sul primo numero del «Journal of Symbolic Logic»:

IL SECONDO TEOREMA D'INDECIDIBILITÀ DI CHURCH. *Il problema di decisione della teoria della quantificazione è irresolubile. Piú precisamente, l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi della teoria della quantificazione, secondo una normale attribuzione dei numeri di Gödel, non è ricorsivo.*

17. *Indecidibilità ed incompletezza.*

A chiusura di questa esplorazione, può essere interessante notare la relazione tra i concetti di indecidibilità e di incompletezza. In primo luogo, è necessario osservare che sono in uso varie definizioni non equivalenti di completezza. Talvolta si dice completo un sistema se tutte le formule «universalmente vere o valide» del sistema sono anche suoi teoremi. Si chiama questa nozione di completezza *completezza in senso semantico*. Al contrario, talvolta si dice completo un sistema se non contiene proposizioni indecidibili. Si chiama questa nozione di completezza *completezza in senso sintattico*. È facile dimostrare che le due nozioni di completezza non sono coestensive. Per esempio, è ben noto che il calcolo proposizionale, in una qualsiasi delle sue formalizzazioni consuete, è completo. Tuttavia, il calcolo proposizionale contiene certamente proposizioni indecidibili, dal momento che p, $-p$ costituisce una coppia di proposizioni indecidibili nel calcolo proposizionale. Cosí il senso in cui il calcolo proposizionale è completo è quello semantico: ogni forma valida (tautologia) è un teorema.

Osservazioni simili si applicano alla teoria della quantificazione. Gödel dimostrò (1931) che la teoria della quantificazione, in una qualsiasi delle sue formalizzazioni consuete, è completa: cioè, ogni formula valida della teoria della quantificazione è un teorema della teoria della quantificazione.

Ci sono casi, tuttavia, in cui le due nozioni di completezza coincidono. Per esempio, adottando la convenzione che siano considerate ben formate nella teoria Q soltanto formule che *non contengano variabili libere*, allora le due nozioni di completezza vengono a coincidere. In altri termini, la completezza di Q in senso semantico implicherebbe la completezza anche in senso sintattico. Dal momento, tuttavia, che Gödel dimostrò che esistono proposizioni indecidibili in Q, e anche proposizioni indecidibili prive di variabili libere, ne segue che Q non è completo né in senso semantico né in senso sintattico, e lo stesso vale per tutte le estensioni consistenti di Q.

La caratteristica che rende il calcolo proposizionale e la teoria della quantificazione diverse dalla teoria Q è che tutte le formule ben formate di queste due teorie contengono in un certo senso variabili libere. Si possono ad esempio considerare le variabili proposizionali p, q, r, s, t, p', q', r', s', t', ... del calcolo proposizionale come variabili proposizionali libere. Analogamente si possono considerare le lettere predicative F, G, H, ... della teoria della quantificazione come variabili predicative libere. Se si adotta questo punto di vista, allora si deve ammettere che ogni formula del calcolo proposizionale e della teoria della quantificazione contiene qualche variabile libera; questo dal momento che ogni formula della teoria della quantificazione contiene almeno delle variabili predicative libere, anche se non contiene variabili individuali libere.

Questa è la ragione per cui la nozione di «verità» non può essere applicata alle formule della teoria della quantificazione. Si deve invece parlare di «verità universale» (verità *per tutti i valori* delle variabili predicative libere), e la «verità universale», contrariamente alla verità, non soddisfa la legge del terzo escluso.

Come dimostrano gli esempi del calcolo proposizionale e della teoria della quantificazione, la completezza in senso semantico non implica la risolubilità o meno del problema di decisione, dato che il calcolo proposizionale ha un problema di decisione risolubile, mentre quello della teoria della quantificazione è irresolubile. Esiste forse una qualche connessione tra completezza *in senso sintattico* e irresolubilità del problema di decisione?

L'esistenza di proposizioni indecidibili non implica certamente l'irresolubilità del problema di decisione, dato che, come si è appena visto, il calcolo proposizionale contiene proposizioni indecidibili e ha un problema di decisione risolubile. Esiste, tuttavia, un'implicazione nella direzione opposta: Ogni sistema formale il cui problema di decisione è irresolubile contiene proposizioni indecidibili.

Il motivo di ciò è che l'insieme dei teoremi di un sistema formale è sempre un insieme generato. Quindi, se, per ogni proposizione A, o A o la negazione di A è un teorema, allora non solo l'insieme dei teoremi del sistema formale è ricorsivamente enumerabile, ma lo è anche il suo complemento.

Una verifica informale di quanto si è detto è la seguente: assumendo la tesi di Church, si può osservare che, se un sistema formale è completo in senso sintattico (non contiene proposizioni indecidibili), allora è possibile generare con una procedura molto semplice i non-teoremi del sistema, elencando tutti i teoremi del sistema, e copiando su un elenco separato solo quelli che cominciano

con « — ». A questo punto si cancellino i « — ». Il risultato sarà l'elenco di tutte quelle formule ben formate le cui negazioni sono teoremi; ma in base all'assunzione che non esistono nel sistema proposizioni indecidibili, questo deve essere esattamente l'elenco dei non-teoremi (posto che il sistema sia consistente). Tuttavia, Kleene ha dimostrato che se un insieme ricorsivamente enumerabile ha un complemento ricorsivamente enumerabile, allora l'insieme è ricorsivo. Si è appena visto che se una teoria non contiene proposizioni indecidibili, allora l'insieme dei teoremi e l'insieme dei non-teoremi sono entrambi ricorsivamente enumerabili (la teoria ammette cioè sia una procedura completa di decisione, sia una procedura completa di smentita). Cosí, in base al risultato di Kleene, ogni teoria di questo tipo è decidibile – vale a dire, l'insieme dei teoremi di ogni teoria di questo tipo è ricorsivo. Si vede quindi che una teoria che non contiene proposizioni indecidibili ha un problema di decisione risolubile, o, capovolgendo la frase, se una teoria è indecidibile, allora deve contenere proposizioni indecidibili.

Seguendo Quine [1950] si può notare che lo stesso risultato di Kleene dimostra non solo che una teoria indecidibile deve contenere proposizioni indecidibili, ma che una teoria di questo tipo non può ammettere alcuna procedura uniforme di refutazione di qualunque tipo. Questo perché una procedura di refutazione è semplicemente una procedura per generare tutti i non-teoremi di una teoria: e se una teoria è indecidibile, allora l'insieme dei non-teoremi non è un insieme generato.

Qui sopra si è fornita un'argomentazione informale per dimostrare che l'insieme dei non-teoremi di una teoria completa (in senso sintattico) è un insieme generato, e si è concluso che era un insieme ricorsivamente enumerabile (facendo uso di una delle forme che sono state date della tesi di Church). Dimostrazioni informali di questo tipo richiedono, naturalmente, d'essere controllate risalendo alle definizioni formali: ma in tutti i casi è stato dimostrato che è possibile condurre formalmente queste argomentazioni. Questo uso informale della tesi di Church è estremamente comune nella teoria della ricorsività. [H. P.].

Church, A.
1936*a* *A note on the Entscheidungsproblem*, in «Journal of Symbolic Logic», I, 1, pp. 40-41.
1936*b* *An unsolvable problem of elementary number theory*, in «American Journal of Mathematics», LVIII, pp. 345-63.
1941 *The Calculi of Lambda Conversion*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Davis, M.; Putnam, H.; e Robinson, J.
1961 *The decision problem for exponential Diophantine equations*, in «Annals of Mathematics», LXXIV, pp. 425-36.

Gödel, K.
1931 *Über formale unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», XXXVII, pp. 349-60 (trad. it. in E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano 1961, pp. 203-28).
[1934] *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*, in M. Davis (a cura di), *The Undecidable; Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett N.Y. 1965, pp. 39-74.

Kleene, S. C.
1936 *General recursive functions of natural numbers*, in «Mathematische Annalen», CXII, 5, pp. 727-42.
1952 *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Matijasévič, Y.
1970 *Diofantovost pere çislimyh množestv*, in «Doklady Akademii Nauk SSSR», CXCI, 2, pp. 279-82.

Quine, W. van Orman
1950 *Methods of Logic*, Holt, New York 1959[3] (trad. it. Feltrinelli, Milano 1970[4]).

Rosser, B.
1936 *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, in «Journal of Symbolic Logic», I, pp. 87-91.

Tarski, A.
1933 *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, in «Acta Towarzystwej Naukowego i Literackiego Warszawskiego», fasc. 34; trad. ted. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, in «Studia Philosophica», I (1935), pp. 261-405 (trad. it. in F. Rivetti Barbò, *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo. Da Peirce a Tarski*, Vita e Pensiero, Milano 1961, pp. 391-677).

Tarski, A.; Mostowski, A.; e Robinson, R. M.
1953 *Undecidable Theories*, North-Holland, Amsterdam.

La teoria (cfr. **teoria/modello**) della ricorsività non è altro che la teoria della computabilità effettiva (cfr. **algoritmo, calcolo**). Si tratta dunque di una teoria matematica (cfr. **matematiche**) che, indipendentemente dalla propria importanza intrinseca, ha un posto privilegiato, legata a problemi che si collocano a fondamento delle matematiche (cfr. **assioma/postulato, dipendenza/indipendenza, insieme**). Vi è in realtà un legame fra l'esistenza di problemi irresolubili con l'uso di mezzi effettivi e l'esistenza di proposizioni indecidibili (cfr. **logica**) in tutti i formalismi (cfr. **formalizzazione**) dotati di una certa **interpretazione** (cfr. **referenza/verità, semantica**), cosí come in tutti i formalismi dotati di una certa struttura (cfr. **struttura, strutture matematiche, coerenza, deduzione/prova, equivalenza, funzioni, induzione/deduzione, razionale/algebrico/trascendente**).